Mathematics – II

Mrs. A. F Thahara Rifa Fuard

Published by
Centre for External Degrees and
Professional Learning
South Eastern University of Sri Lanka

Mathematics II
கணிதம் II

முன்னுரை

அத்தியாயம் - 1 சார்பு

அத்தியாயம் - 2 திரிகோண கணிதம்

அத்தியாயம் - 3 எல்லைகள்

அத்தியாயம் - 4 வகையீடு

அத்தியாயம் - 5 தொகையீடு

அத்தியாயம் - 6 தாயங்கள்

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம் - 1 சார்பு

1.1 அறிமுகம்
1.2 ஆட்சி, இணை ஆட்சி, வீச்சு
1.3 நேர்மாறு சார்புகள்

அத்தியாயம் - 2 திரிகோண கணிதம்

2.1. அறிமுகம்
2.2. அடிப்படை திரிகோண கணித விதிகள்
2.3. பிரயோகங்கள்

அத்தியாயம் - 3 எல்லைகள்

3.1. அறிமுகம்
3.2. எல்லைகளின் அடிப்படை விதிகள்
3.3. எல்லை விதிகளை பயன்படுத்தி எல்லை சார்புகள்
3.4. எல்லை பிரயோகங்கள்

அத்தியாயம் - 4 வகையீடு

4.1 அறிமுகம்
4.2 வகையீட்டு விதிகள்
4.3 விதிகளை பயன்படுத்தி வகையிட்டு செய்கைகள்
4.4 வகையீட்டின் பிரயோகங்கள்

அத்தியாயம் - 5 தொகையீடு

5.1 அறிமுகம்
5.2 தெகையீட்டு விதிகள்
5.3 விதிகளை பயன்படுத்தி தெகையீட்டு செய்கைகள்
5.4 தெகையீட்டின் பிரயோகங்கள்

அத்தியாயம் - 6 தாயங்கள்

6.1 அறிமுகம்
6.2 தாயச் செய்கைகள்
6.3 நிலை மாற்று தாயம்
6.4 நேர் மாற்று தாயம்
6.5 தாயங்களின் பிரயோகங்கள்

அத்தியாயம் - 01

சார்புகள்

பொருளடக்கம் பக்கம்

1.1 அறிமுகம்.....02

1.2 ஆட்சி, இணை ஆட்சி, வீச்சு.....04

1.3 நேர்மாறு சார்புகள்.....09

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

ஒரு வெறுமையற்ற தொடையொன்றில் உள்ள ஒவ்வொரு தனியான மூலகங்களும் யாதாயினும் ஒரு பொதுத் தன்மையினை கொண்டிருக்கும் போது அத்தன்மை குறியீடு x இனால் காட்டப்படும்.

உதாரணம் : 01) $\mathrm{A} = \{2,4,6,8, \dots \dots\}$ எனும் தொடையில் உள்ள மூலகங்கள் இரட்டை எண்கள் என்பதால் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$x \in$ இரட்டை எண்கள்

உதாரணம் : 02) $\mathrm{B} = \{\dots \dots -3, -2. -1, 0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$ எனும் தொடையில் உள்ள மூலகங்கள் முழு எண்களைக் குறிப்பதால் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$x \in \mathbb{Z}$

குறிப்பு : N : இயற்கை எண்கள்

$\mathbb{Z}$: முழு எண்கள்

$\mathbb{Z}^+$: நேர் முழு எண்கள்

$\mathbb{Z}^-$: மறை முழு எண்கள்

R : மெய் எண்கள்

இரு தொடைகளில், ஓர் தொடையில் உள்ள ஒவ்வொரு தனியான மூலகமும் மற்றைய தொடையில் உள்ள ஒவ்வொரு தனியான மூலகத்துடனும் யாதாயினும் ஒரு தொடர்பைக் கொண்டிருக்குமாயின் அத் தொடர்பு சார்பு எனப்படும். சார்பிற்கு f (x) எனும் குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இதனை முதன்முதலில் அறிமுகப்படுத்தியவர் கணிதவியலாளர் ஓய்லர் ஆவார்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

தொடைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை சார்புகளாக கணித ரீதியில் விளக்குதல்

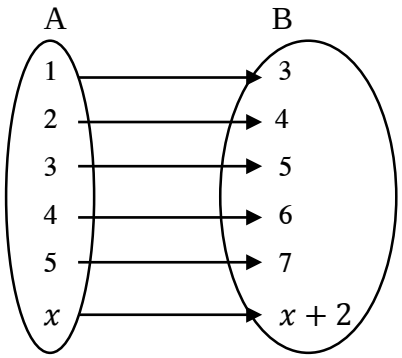
எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் இரு தொடைகளுக்கிடையான தொடர்பினை கணித ரீதியில் ஆராய்வர்.

சார்புகளினதும், நேர்மாறு சார்புகளினதும் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றை வரையறுக்க முடியுமாக இருப்பர்.

1.1 அறிமுகம்

A = {1,2,3,4,5}, B = { 3,4,5,6,7 } ஆகிய தொடைகளில் உள்ள A இன் மூலகங்கள் 1,2,3,4,5 என்பன முறையே B இன் மூலகங்கள் 3,4,5,6,7 என்பவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ள விதத்தை அவதானிக்க.



ஆகவே, $f : A \rightarrow B$ ஆகும்போது

$f(x)$ சார்பு $f(x) = x + 2$ ஆகும் இங்கு $x \in A$

மேலும் பின்வரும் இரு நிபந்தனைகனின் அடிப்படையில் சார்பானது தொடர்புபடுத்தப்படும்.

(i) A யில் உள்ள **ஒவ்வொரு மூலகமும்,** B இல் உள்ள மூலகம் ஒன்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

(ii) A இன் ஒரு மூலம் B இன் ஒரு மூலகத்துடன் மட்டும் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

A இலுள்ள மூலகம் 1 ஆனது $\boldsymbol{B}$ இலுள்ள மூலகம் 3 உடன் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது, இதனை f இன் கீழ் 1 இன் விம்பம் 3 எனப்படும்.

$f(1) = 3$ f இன் கீழ் 1 இன் விம்பம் 3 ஆகும்.

$f(2) = 4$ f இன் கீழ் 2 இன் விம்பம் 4 ஆகும்.

$f(3) = 5$ f இன் கீழ் 3 இன் விம்பம் 5 ஆகும்.

$f(4) = 6$ f இன் கீழ் 4 இன் விம்பம் 6 ஆகும்.

உதாரணம் 1

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,9,16\}$ ஆகிய தொடைகளில் $A \rightarrow B$ என்பதை $f(x) = x^2$ எனும் தொடர்பின் மூலம் ஒரு சார்பாக வரையறுக்கலாம்.

1.2 சார்பு ஒன்றின் ஆட்சி , இணையாட்சி, வீச்சு

சார்பு ஒன்றின் ஆட்சி , இணையாட்சி

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புபடும் இருதொடைகளில் ஒரு தொடை ஆட்சியாகவும் மற்றைய தொடை இணையாட்சியாகவும் காணப்படும்.

உதாரணமாக 5 நபர்களின் திணிவுகள் தனித்தனியாக அளக்கப்படும் போது (முதல் நபர் : 50 kg) , (இரண்டாம் நபர் : 60 kg) , (மூன்றாம் நபர் : 55 kg) , (நான்காம் நபர் : 70 kg) , (ஐந்தாம் நபர் : 65 kg) என்றவாறு காணப்படுகின்றன. இங்கு 1 தொடக்கம் 5 வரையான நபர்களை அவர்களின் திணிவோடு தொடர்புபடுத்தப்படுவது ஒரு சார்பாகும்.

இங்கு { 1, 2 ,3 ,4,5 } என்பதை ஆட்சி என்றும், { 50 ,60 ,55 ,70 ,65 } என்பதை இணையாட்சி என்றும் அழைக்கப்படும்.

$$A = \{1 , 2 , 3, 4 ,5\} \qquad B = \{ 50,60,55,70,65\}$$

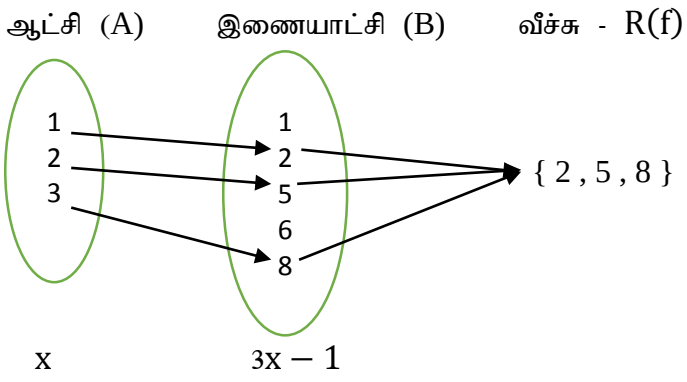
$f : A \longrightarrow B$ எனும் சார்பில்.

f இன் ஆட்சி A ஆகும். இது $D(f) = A$ அல்லது $D_f = A$ என எழுதப்படும்.

சார்பு ஒன்றின் வீச்சு

சார்பு f இன் ஆட்சியிலுள்ள மூலகங்கள் தொடர்புபடுத்தப்பட்டு இணையாட்சியிலுள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை வீச்சு எனப்படும். சார்பு ஒன்றின் வீச்சானது $R(f)$ அல்லது R_f என எழுதப்படும்.

$R(f) = \{f(x) : x \in A\}$ ஆகும்.



மேலே $f : A \rightarrow B$ எனும் சார்பு $f(x) = 3x - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு $x \in A$ ஆகும்.

குறிப்பு : ஆட்சி $\longrightarrow$ சார்பு $f(x)$ $\longrightarrow$ வீச்சு

உதாரணம் $\{0,1,2\} \longrightarrow f(x) = x^3 \longrightarrow \{0,1,8\}$

கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் ஆட்சி A யின் இணை ஆட்சி B ஆகும்.

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$f : A \longrightarrow B$

$f(x) = x + 3$ என சார்பு f வரயறுக்கப்படுகிறது.

$f(1) = 1 + 3 = 4$

$f(2) = 2 + 3 = 5$

$f(3) = 3 + 3 = 6$

ஆகவே $D(f) = A = \{1,2,3\}$

$R(f) = \{4,5,6\}$

இங்கு வீச்சானது இணையாட்சியின் ஓர் உபதொடையாக காணப்படுகின்றது.

$R(f) = \{2,3,4,5,6\} \subseteq B$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$

$f(x) = x + 2$ என சார்பு f வரயறுக்கப்படுகிறது.

ஆகவே $D(f) = A = \{1,2,3,4\}$ $R(f) = \{3,4,5,6\}$

உதாரணம் 02

$A = \{x: 0 \leq x \leq 5\} = [0,5]$ என்க.

சார்பு g ஆனது $g : A \longrightarrow R$

$g(x) = 2x$ என்க.

இங்கு $D(g) = [0\ ,5]$, $R(g) = [0\ ,10]$ ஆகும்.

உதாரணம் 03

$f(x) = x^2 + 1$, $(-1 \leq x \leq 2\ ,\ x \in \mathbb{Z})$ என்றவாறு வரையறுக்கப்படும் போது f இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

f இன் ஆட்சி $D(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$

$f(-1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

ஆகவே $R(f) = \{1, 2, 5\}$

உதாரணம் 04

$A = \{1,2,3, \ldots \ldots \ldots\}$

சார்பு f ஆனது $f : A \longrightarrow R$ (மெய்யெண் தொடை)

$f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்படும் போது வீச்சைக் காண்க.

$R(f) = \{1,4,9, \ldots \ldots\}$

உதாரணம் 05

$A = R$ (மெய்யெண் தொடை)

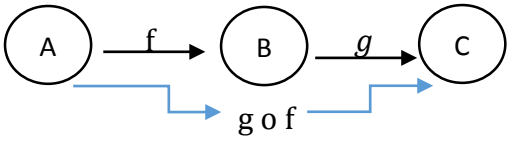
சார்பு f ஆனது $f : A \longrightarrow R$

$f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்படும் போது ஆட்சி, வீச்சைக் காண்க.

$D(f) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots..\}$

$R(f) = \{0, 1, 4, 9 \ldots\ldots\ldots..\}$

குறிப்பு :



$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ஆக இருக்குமாறு இரு சார்புகள் காணப்படும் போது f, g யின் சேர்த்திச் சார்பு $g \circ f : A \rightarrow C$ என வரையறுக்கப்படும். அதே போன்று g, f யின் சேர்த்திச் சார்பு $f \circ g : C \rightarrow A$ என வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $g \circ f(x) = g[f(x)]$ ஆகும்

$f \circ g(x) = f[g(x)]$ ஆகும்

உதாரணம் :

$f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ ஆக இருக்குமாயின்

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 - 2$

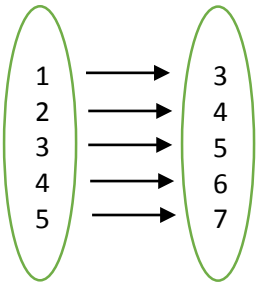
$f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2 - 2] = 2(x^2 - 2)^2 + 3$

1.3 சார்பு ஒன்றின் நேர்மாறு (Inverse of a Function)

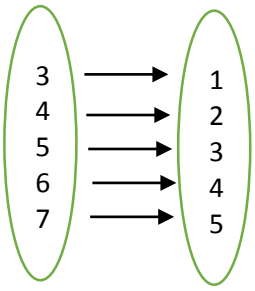
$f : A \rightarrow B$ சார்பு ஆக இருக்கும் போது f யின் நேர்மாறு சார்பு f^{-1} ஆக குறிப்பிடப்படும்.

$f^{-1} : B \rightarrow A$ ஆக வரையறுக்கப்படும்.

$f : A \rightarrow B$



$f^{-1} : B \rightarrow A$



$f(x) = x + 2$ ஆகும்.

இங்கு $(x \in A)$

$f^{-1}(x) = x - 2$ ஆகும்

இங்கு $(x \in B)$

அதாவது, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,45,6,7\}$ ஆகும்

$f : A \rightarrow B$ சார்பு ஆகும்போது $f(x) = x + 2$, $(x \in A)$ ஆகும்

இங்கு $x + 2 = f(x)$

$$x = f(x) - 2$$

$f^{-1}: B \rightarrow A$ சார்பு ஆகும்போது $f^{-1}(x) = x - 2$, $(x \in B)$ ஆகும்.

இங்கு $f \circ f^{-1}(x)$ ஆனது பின்வருமாறு அமையும்.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f[f^{-1}(x)] \\ &= f[x - 2] \\ &= (x - 2) + 2 \\ &= x \end{aligned}$$

உதாரணம் 01

$A = \{ x : -3 \leq x \leq +3 , x \in \mathbb{Z} \}$ ஆகும். $f : A \rightarrow R$ சார்பு ஆகும்போது $f(x) = x^2 + 1$, $(x \in A)$ ஆகும். வீச்சு, $f^{-1}(x)$ என்பவற்றைக் காண்க.

$f(-1) = -1^2 + 1 = 2$ $\qquad$ $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(-2) = -2^2 + 1 = 5$ $\qquad$ $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$f(-3) = -3^2 + 1 = 10$ $\qquad$ $f(3) = 3^2 + 1 = 10$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

ஆகவே, $R(f) = \{ 1 , 2 , 5 , 10 \}$

$f(x) = x^2 + 1$

$x^2 = f(x) - 1$

$x = \sqrt{f(x) - 1}$

ஆகவே, $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$

உதாரணம் 02

$f : A \rightarrow B$ சார்பு ஆக இருக்கும் போது $f(x) = 2x + 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. f இன் நேர்மாறு சார்பு $f^{-1} : B \rightarrow A$ இனை காண்க.

$f(x) = 2x + 1$

$2x = f(x) - 1$

$x = \frac{f(x) - 1}{2}$ $\qquad$ ஆகவே, $f^{-1} = \frac{x - 1}{2}$

உதாரணம் 03

$f(x) = \frac{1}{x}$, ($x \in R, x \neq 0$) என்க. $f^{-1}(x)$ ஐக் காண்க.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

இங்கு $D(f) = R - \{0\}$, $R(f) = R - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ஆகவே $x = \frac{1}{f(x)}$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in R,\ x \neq 0)$$

$f^{-1} = f$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$, $(x \in R,\ x \neq 1)$ என வரயறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) f இன் ஆட்சி

(b) $f^{-1}(x)$ என்பவற்றைக் கான்க.

f இன் ஆட்சி $= R - \{1\}$

$f(x) = y$ என்க,

$y = \frac{x+3}{x-1}$

$y\ (x-1) = (x+3)$

$y\,x - y = x + 3$

$y\,x - x = y + 3$

$x\,(y-1) = y + 3$

$x = \frac{(y+3)}{(y-1)}$

ஆகவே, $f^{-1}(x) = \frac{(x+3)}{(x-1)}$

சுருக்கம்

- ❖ ஆட்சி, இணையாட்சி எனும் எண்ணக்கருக்கள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புபட்ட மூலகங்களைக்கொண்ட இரு தொடைகளைத் தொடர்புபடுத்தும் சார்புகளாகும்
- ❖ வீச்சானது இணையாட்சியின் ஓர் உபதொடையாகும்.
- ❖ ஆட்சியிலுள்ள மூலகங்களினால் யாதாயினும் ஒரு சார்பு மூலம் வரையறை செய்யப்படும் தொடையே அச்சார்பின் வீச்சாகக் காணப்படும்.

  ஆட்சி $\rightarrow$ சார்பு $\rightarrow$ வீச்சு

பயிற்சி

01) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ என்க.

$f : A \rightarrow B$

$f(x) = x + 5$ என சார்பு f வரயறுக்கப்படுகிறது.

ஆகவே f இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவறறைக் காண்க

02) $f(x) = 3x + 1$ ஆகுமாறு f இன் ஆட்சி $D(f) = \{-2, 3\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே f இன் வீச்சைக் காண்க

03) $A = \{x : -3 \leq x \leq +3, x \in Z\}$ ஆகும். $f : A \rightarrow R$ சார்பு ஆகும்போது $f(x) = x^2 - 1$, $(x \in A)$ ஆகும். வீச்சு, $f^{-1}(x)$ என்பவற்றைக் காண்க.

04) $f : A \rightarrow B$ சார்பு ஆக இருக்கும் போது $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. f இன் நேர்மாறு சார்பு $f^{-1}: B \rightarrow A$ இனைக் காண்க.

05) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $(x \in R,\ x \neq 1)$ என வரயறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) f இன் ஆட்சி

(b) $f^{-1}(x)$

(c) $f \circ f^{-1}(x)$ என்பவற்றைக் கான்க.

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.

அத்தியாயம் - 02

திரிகோண கணிதம்

பொருளடக்கம் பக்கம்

2.1. அறிமுகம்.....15

2.2. அடிப்படை திரிகோண கணித விதிகள்.....21

2.3. பிரயோகங்கள்.....24

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

செங்கோண முக்கோணங்களின் பக்க நீளங்கள் மற்றும் அகக் கோணங்கள் ஆகியவற்றின் விகிதங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை விளக்கும் கணிதவியல் உண்மைகள் திரிகோணகணிதம் ஆகும். தூரம், ஏற்றக்கோணம், இறக்கக்கோணம் போன்றவற்றினை நேரடியாக அளவிட முடியாத சந்தர்ப்பங்களில் செங்கோண முக்கோணங்களின் துணைகொண்டு கணிப்பதற்கு திரிகோண கணிதம் உதவுகிறது. உதாரணமாக மலைகளின் உயரம், கோள்களுக்கிடையே உள்ள தூரம், பூமிக்கும் கோள்களுக்கும் இடையிலான ஏற்ற - இறக்கக் கோணம் , தேசப்பட உருவாக்கம் போன்றவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இதற்கு தியோடலைட் எனும் கருவி பயன்படுகின்றது.

திரிகோண கணிதத்தின் தந்தை என அழைக்கப்படும் ஹிப்பார்கஸ் என்பவரினாலும் ஆர்கிமிடீஸ், யூக்கிளிட், தொலமி ஆகிய கணிதவியலாளர்களினாலும் வட்டத்தில் வரையப்படும் நாண்கள், கோணங்கள் என்பவற்றின் பண்புகளை ஆய்வு செய்து ஸைன், கொஸ், தான், கொஸெக், ஸெக், கொட் ஆகிய ஆறு திரிகோணணித விகிதங்களும் அவைகளுடன் தொடர்புடைய பல விதிகளும் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டன.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

செங்கோண முக்கோணியில் பக்க நீளங்கள், கோணம் என்பவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை திரிகோணகணித ரீதியில் விளக்குவதுடன் திரிகோணகணித விதிகளைப் பணன்படுத்தி பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்.

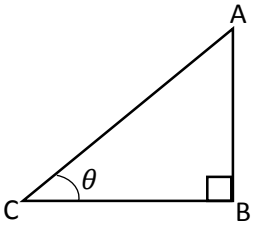
எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்களை அறிவதுடன் திரிகோணகணித விதிகளுடனான கணித செய்கைகளை மேற்கொள்ள முடியுமாக இருப்பர்.

அன்றாட வாழ்வில் பல சந்தர்ப்ங்களில் தூரம், கோணம் என்பவற்றை அளப்பதந்கு திரிகோணகணிதத்தை பயன்படுத்திக்கொள்வர்.

அறிமுகம்.

செங்கோண முக்கோணியொன்றில் செங்கோணத்திற்கு எதிரான பக்கம் செம்பக்கம் என அழைக்கப்படும். செங்கோண முக்கோணியில் தரப்படும் கோணம் ஒன்றிற்கு எதிர்ப்பக்கம், அயற்பக்கம் என்பன பின்வருமாறு.

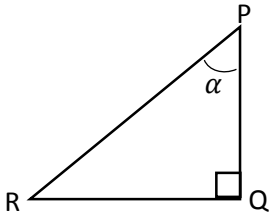


கோணம் θ இற்கு

செம்பக்கம் $= AC$

ஏதிர்ப்பக்கம் $= AB$

அயற்பக்கம் $= BC$



கோணம் α இற்கு

செம்பக்கம் $= PR$

ஏதிர்ப்பக்கம் $= QR$

அயற்பக்கம் $= PQ$

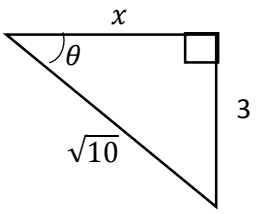
யரதும் ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்களாகிய sin, cos, tan ஆகியவற்றுக்கான கணிப்புகள் பின்வருமாறு.

$$sin\,\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} \qquad cos\,\theta = \frac{\text{அயற்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} \qquad tan\,\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அயற்பக்கம்}}$$

மேலும் $cosec, sec, cot$ ஆகிய திரிகோணகணித விகிதங்களின் கணிப்புகள் பின்வருமாறு

$$\frac{1}{sin\theta} = cosec\,\theta \qquad \frac{1}{cos\theta} = sec\,\theta \qquad \frac{1}{tan\,\theta} = cot\,\theta$$

உதாரணம் 01



பைதகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$x^2 + 3^2 = 10$

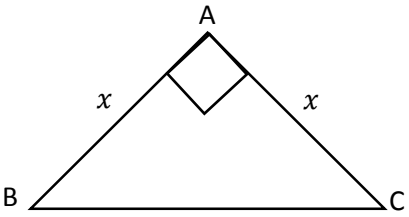
$x^2 = 10 - 9$

$x^2 = 1$, ஆகவே $x = 1$

$$sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad tan\theta = \frac{3}{1} = 3$$

$$cosec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3} \qquad sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10} \qquad tan\theta = \frac{1}{3}$$

உதாரணம் 02



இருசமபக்க முக்கோணி என்பதால்

$A\hat{B}C = A\hat{C}B = 45^0$

பைதகரஸ் தேற்றப்படி

$AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

ஆகவே,$AC = x\sqrt{2}$

$$sin45^0 = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad cos45^0 = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad tan45^0 = \frac{x}{x} = 1$$

சில கோணங்களின் திரிகோணவிகிதங்களின் பெறுமானங்கள்

விகிதங்கள்	$\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$	$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$	$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$	$\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$	$\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$
$\boldsymbol{sin\,\theta}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\boldsymbol{cos\,\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boldsymbol{tan\,\theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

உதாரணம்

i) $sin30^0 \text{ X } cos30^0 = \frac{1}{2}\ X\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ii) $sin45^0 + \ cos45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

iii) $(sin90^0 \text{ X } tan45^0) + (tan30^0 \text{ X } tan60^0)$

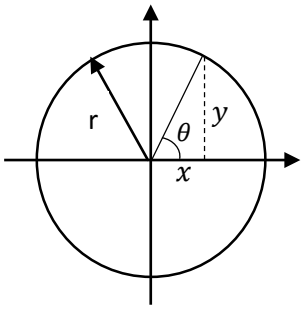
$= (\ 1 \quad X \quad 1\ ) \ + \left(\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ X\ \sqrt{3}\ \right)$

$= \ 1 \ + \ 1$

$= \ 2$

குறிப்பு 01

முக்கோணியினுள் அமையும் கூர்ங்கோணங்களுக்கு மட்டுமன்றி விரிகோணம், பின்வளைகோணம் ஆகிய எந்தவொரு கோணத்திற்கும் திரிகோணகணித விகிதமானது வட்டமொன்றை வைத்து வரையறுக்கப்படும்.



வட்டத்தின் ஆரை $= r$ என்க

$sin\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad cosec\theta = \frac{r}{y}$

$cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad sec\theta = \frac{r}{x}$

$tan\theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad cot\theta = \frac{x}{y}$

குறிப்பு 02

i) $sin(-\theta) = -sin\theta \quad \Rightarrow \quad cosec(-\theta) = -cosec\theta$

ii) $\cos(-\theta) = cos\theta \quad \Rightarrow \quad sec(-\theta) = sec\theta$

iii) $tan(-\theta) = -tan\theta \quad \Rightarrow \quad cot(-\theta) = -cot\theta$

உதாரணம்

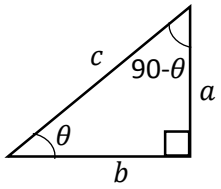
01) $sin(-30^0) = -sin(30^0) = -\frac{1}{2}$

02) $cos(-30^0) = cos(30^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

03) $Tan(-30^0) = -tan(30^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

திரிகோணகணித விகிதங்களின் கோண அளவீடுகள்.

01) θ , $(90^0 - \theta)$ என்பற்றுக்கிடையான தொடர்பு $(0 < \theta < 90)$



$sin\theta = \frac{a}{c}$, $cos(90-\theta) = \frac{a}{c}$

$cos\theta = \frac{b}{c}$, $sin(90-\theta) = \frac{b}{c}$

$tan\theta = \frac{a}{b}$, $cot(90-\theta) = \frac{b}{a}$

$cot\theta = \frac{b}{a}$, $\tan(90-\theta) = \frac{a}{b}$

$$\boxed{\begin{aligned} sin(90-\theta) &= cos\theta \\ cos(90-\theta) &= sin\theta \\ tan(90-\theta) &= cot\theta \\ cot(90-\theta) &= tan\theta \end{aligned}}$$

உதாரணம்

i. $sin(30^0) = sin(90^0 - 60^0) = cos60^0 = \frac{1}{2}$

ii. $cos(30^0) = cos(90^0 - 60^0) = sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii. $tan(45^0) = tan(90^0 - 45^0) = cot45^0 = 1$

02) θ , $(90^0 + \theta)$ என்பற்றுக்கிடையான தொடர்பு $(0 < \theta < 90)$

$$sin(90 + \theta) = sin[90 - (-\theta)] = coc(-\theta) = \quad cos\theta$$

$$cos(90 + \theta) = cos[90 - (-\theta)] = sin(-\theta) = \quad -sin\theta$$

$$tan(90 + \theta) = tan[90 - (-\theta)] = cot(-\theta) = \quad -cot\theta$$

$$cot(90 + \theta) = cot[90 - (-\theta)] = tan(-\theta) = \quad -tan\theta$$

உதாரணம்

i. $sin(150^0) = sin(90^0 + 60^0) = cos60^0 = \frac{1}{2}$

ii. $cos(135^0) = cos(90^0 + 45^0) = -sin45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

iii. $tan(120^0) = tan(90^0 + 30^0) = -cot30^0 = -\sqrt{3}$

03) θ , $(180^0 - \theta)$ என்பற்றுக்கிடையான தொடர்பு $(0 < \theta < 90)$

$$sin(180 - \theta) = sin[90 + (90 - \theta)] = cos(90 - \theta) = sin\theta$$

$$cos(180 - \theta) = cos[90 + (90 - \theta)] = -sin(90 - \theta) = -\cos\theta$$

$$tan(180 - \theta) = tan[90 + (90 - \theta)] = -cot(90 - \theta) = -tan\theta$$

$$cot(180 - \theta) = cot[90 + (90 - \theta)] = -tan(90 - \theta) = -cot\theta$$

உதாரணம்

i. $sin(120^0) = sin(180^0 - 60^0) = sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii. $cos(120^0) = cos(180^0 - 60^0) = -cos60^0 = -\frac{1}{2}$

iii. $tan(120^0) = tan(180^0 - 60^0) = -tan60^0 = -\sqrt{3}$

04) θ , $(180^0 + \theta)$ என்பற்றுக்கிடையான தொடர்பு $(0 < \theta < 90)$

$$sin(180 + \theta) = sin[90 + (90 + \theta)] = cos(90 + \theta) = -sin\theta$$

$$cos(180 + \theta) = cos[90 + (90 + \theta)] = -sin(90 + \theta) = -cos\theta$$

$$tan(180 + \theta) = tan[90 + (90 + \theta)] = cot(90 + \theta) = tan\theta$$

$$cot(180 + \theta) = cot[90 + (90 + \theta)] = -tan(90 + \theta) = cot\theta$$

உதாரணம்

i. $sin(210^0) = sin(180^0 + 30^0) = -sin30^0 = -\frac{1}{2}$

ii. $cos(210^0) = cos(180^0 + 30^0) = -cos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

iii. $tan(210^0) = tan(180^0 + 30^0) = tan30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

05) θ , $(360^0 - \theta)$ என்பற்றுக்கிடையான தொடர்பு $(0 < \theta < 90)$

$$sin(360 - \theta) = sin[180 + (180 - \theta)] = -sin(180 - \theta) = -sin\theta$$

$$cos(360 - \theta) = cos[180 + (180 - \theta)] = -cos(180 - \theta) = cos\theta$$

$$tan(360 - \theta) = tan[180 + (180 - \theta)] = tan(180 - \theta) = -tan\theta$$

$$cot(360 - \theta) = cot[180 + (180 - \theta)] = cot(180 - \theta) = -cot\theta$$

உதாரணம்

i. $sin(315^0) = sin(360^0 - 45^0) = -sin45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii. $cos(315^0) = cos(360^0 - 45^0) = cos45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

iii. $tan(315^0) = tan(360^0 - 45^0) = -tan45^0 = -1$

குறிப்பு 01

திரிகோணகணித விகிதங்களின் 90^0 இன் ஒற்றை மடங்குகளில் விகிதம் பின்வருமாறு மாறுபடும்.

$sin \rightarrow cos$ $\qquad$ $tan \rightarrow cot$

$cos \rightarrow sin$ $\qquad$ $cot \rightarrow tan$

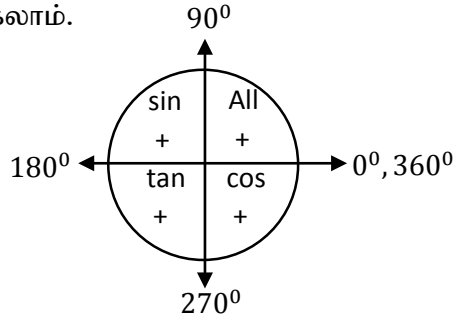
திரிகோணகணித விகிதங்களின் 90^0 இன் இரட்டை மடங்குகளில் விகிதம் மாறுபடாது.

$sin \rightarrow sin$ $\qquad$ $tan \rightarrow tan$

$cos \rightarrow cos$ $\qquad$ $cot \rightarrow cot$

குறிப்பு 02

திரிகோணகணித விகிதங்களின் குறிகளை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.



உதாரணம்

01) $sin(280^0) = sin(270^0 + 10^0) = -cos(10^0)$

02) $tan(250^0) = tan(270^0 - 20^0) = cot(20^0)$

03) $cos(300^0) = cos(360^0 - 60^0) = cos(60^0) = \frac{1}{2}$

04) $cot(300^0) = cot(270^0 + 30^0) = -tan(30^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

அடிப்படைத் திரிகோணகணித விதிகள்.

அடிப்படைச் சமன்பாடுகள்

1. $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

2. $1 \quad + tan^2\theta \; = \; sec^2\theta$

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$
$$\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$
$$1 \quad + \; tan^2\theta = \; sec^2\theta$$

3. $1 \; + \; cot^2\theta \; = cosec^2\theta$

$$sin^2\theta \; + \; cos^2\theta = 1$$
$$\frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta}$$
$$1 \quad + \; cot^2\theta = \; cosec^2\theta$$

$\boldsymbol{sin(A \pm B)}$, $\mathbf{cos}\boldsymbol{(A \pm B)}$, $\boldsymbol{tan(A \pm B)}$ என்பவற்றின் விரிவுகள்

01) $sin(A + B) = sin \;\; A \, cos \, B + cos \, A \;\; sin \, B$

02) $sin(A - B) = sin \;\; A \, cos \, B - cos \, A \;\; sin \, B$

$$sin[\, A + (-B)] = sin \;\; A \, cos(-B) + cos \, A \;\; sin(-B)$$
$$sin(A - B) \quad = sin \;\; A \times cos \, B + cos \, A \;\; \times - sin \, B$$
$$= sin \;\; A \, cos \, B - cos \, A \;\; sin \, B$$

03) $cos(A + B) = cos \;\; A \, cos \, B - sin \, A \;\; sin \, B$

04) $cos(A - B) = cos \;\; A \, cos \, B + sin \, A \;\; sin \, B$

$$cos[\, A + (-B\,] \; = cos \, A \, cos(-B) - sin \, A \;\; sin(-B)$$
$$\cos(A - B) = cos \, A \times cos \, B - sin \, A \;\; \times - sin \, B$$
$$= cos \, A \;\; cos \, B + sin \, A \;\; sin \, B$$

05) $tan(A+B) = \frac{tan\,A + tan\,B}{1 - tan\ A\,tan\,B}$

06) $tan(A-B) = \frac{tan\,A - tan\,B}{1 + tan\ A\,tan\,B}$

$$tan[\,(A+(-B)\,] = \frac{tan\,A + tan(-B)}{1 - tan\ A\,tan(-B)}$$

$$tan(A-B) = \frac{tan\,A + (-\,tan\,B)}{1 - tan\ A \times -tan\,B} = \frac{tan\,A - tan\,B}{1 + tan\ A\,tan\,B}$$

மடங்குக்கோண வாய்ப்பாடுகள்

01) $sin\,2A = 2\,sinA\ \ cosA$

$$sin(A+A) = sin\ \ A\,cos\,A + cos\,A\ \ sin\,A$$

$$sin\,2A = 2sinA\,cosA$$

02) $cos\,2A = cos^2A - sin^2A$

or

$cos\,2A = 2\,cos^2A - 1$

or

$cos\,2A = 1 - 2\,sin^2A$

$$cos(A+A) = cos\ \ A\,cos\,A - sin\,A\ \ sin\,A$$

$$cos\,2A = cos^2A - sin^2A$$

$$\begin{aligned} cos\,2A &= cos^2A - sin^2A \\ &= cos^2A - (1 - cos^2A\,) \\ &= cos^2A - 1 + cos^2A = 2\,cos^2A - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos\,2A &= cos^2A - sin^2A \\ &= 1 - sin^2A - sin^2A \\ &= 1 - 2\,sin^2A \end{aligned}$$

03) $tan\,2A = \frac{2\,tan\,A}{1-\,tan^2\,A}$

$$tan(A+A) = \frac{tan\,A + tan\,A}{1-\,tan\;A\,tan\,A}$$

$$tan\,2A = \frac{2\,tan\,A}{1-\,tan^2\,A}$$

04) $sin\,3A = 3\,sin\,A - 4\,sin^3\,A$

05) $cos\,3A = 4\,cos^3\,A - 3\,cos\,A$

06) $tan\,3A = \frac{3\,tan\,A - tan^3\,A}{1-3\,tan^2\,A}$

கூட்டல் விகிதங்களை பெருக்கல் விகிதங்களாக்கும் வாய்ப்பாடு

01. $sin\,C + sin\,D = 2\,sin\,(\frac{c+D}{2})\,cos(\frac{c-D}{2})$
02. $sin\,C - sin\,D = 2\,cos\,(\frac{c+D}{2})\,sin(\frac{c-D}{2})$
03. $cos\,C + cos\,D = 2\,cos\,(\frac{c+D}{2})\,cos(\frac{c-D}{2})$
04. $cos\,C - cos\,D = 2\,sin\,(\frac{c+D}{2})\,sin(\frac{D-C}{2})$

பிரயோகங்கள்

01) அடிப்படைச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடு.

உதாரணம் (i) $(sin\theta + cos\theta)^2 = 1 + 2sin\theta\,cos\theta$ என நிறுவுக.

$LHS:\ (sin\theta + cos\theta)^2$

$= sin^2\theta + 2sin\theta\,cos\theta + cos^2\theta$

$= sin^2\theta + cos^2\theta + 2sin\theta\,cos\theta = 1 + 2sin\theta\,cos\theta$

உதாரணம் (ii) $tan\theta + cot\theta = sec\theta\,cosec\theta$ என நிறுவுக.

$LHS:\ tan\theta + cot\theta$

$$= \frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$= \frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{cos\theta\ sin\theta} = \frac{1}{cos\theta\ sin\theta} = sec\theta\ cosec\theta$$

உதாரணம் (iii) $sec^2\theta - (tan\theta - 1)^2 = 2tan\theta$ என நிறுவுக.

$LHS:\ sec^2\theta - (tan\theta - 1)^2$

$= sec^2\theta - (tan^2\theta - 2tan\theta + 1)$

$= sec^2\theta - (sec^2\theta - 2tan\theta) = 2tan\theta$

உதாரணம் (iv) $2cosec^2\theta - (1 + cot\theta)^2 = cosec^2\theta - 2cot\theta$ என நிறுவுக.

$LHS:\ 2cosec^2\theta - (1 + cot\theta)^2$

$= 2cosec^2\theta - (1 + 2cot\theta + cot^2\theta)$

$= 2cosec^2\theta - (cosec^2\theta + 2cot\theta)$

$= cosec^2\theta - 2cot\theta$

02) $sin(A \pm B), \cos(A \pm B), tan(A \pm B)$ என்பவற்றின் பயன்பாடு

உதாரணம் (i) $sin(15^0) = sin(45^0 - 30^0)$

$= sin45^0 \times cos30^0 - cos45^0 \times sin30^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

உதாரணம் (ii) $sin(105^0) = sin(60^0 + 45^0)$

$= sin60^0 \times cos45^0 + cos60^0 \times sin45^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

உதாரணம் $(iii)\ cos75^0 = cos(45^0 + 30^0)$

$$= cos45^0 \times cos30^0 - sin45^0 \times sin30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

உதாரணம் $(iv)\ cos15^0 = cos(45^0 - 30^0)$

$$= cos45^0 \times cos30^0 + sin45^0 \times sin30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

உதாரணம் $(v)\ tan105^0 = tan(60^0 + 45^0)$

$$= \frac{tan60^0 + tan45^0}{1 - tan60^0 \times tan45^0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

உதாரணம் $(vi)\ tan15^0 = tan(45^0 - 30^0)$

$$= \frac{tan45^0 - tan30^0}{1 + tan45^0 \times tan30^0}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{1+1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

உதாரணம் (vii) $tan\,\alpha = \frac{2}{9}$, $tan\ \beta = \frac{7}{11}$ எனின் $\alpha + \beta = 45^0$ எனக் காட்டுக.

$$tan\,(\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha \times tan\,\beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}+\frac{7}{11}}{1-\frac{2}{9}\times\frac{7}{11}} = \frac{\frac{22+63}{99}}{1-\frac{14}{99}} = \frac{\frac{85}{99}}{\frac{85}{99}} = 1$$

$tan\,(\alpha+\beta) = 1$

$tan45^0 = 1$ ஆகவே $(\alpha+\beta) = 45^0$

உதாரணம் $(viii)$ $cos(A+B)\,cos(A-B) = cos^2A - sin^2B$ என காட்டுக.

LHS : $cos(A+B)\,cos(A-B)$

$= (cos\,A\,cosB - sinA\,sinB)\ \ (cosA\,cosB + sinA\,sinB)$

$= cos^2A\,cos^2B - sin^2A\,sin^2B$

$= cos^2A\,(1 - sin^2B\,) - sin^2B\,(\,1 - cos^2A\,)$

$= cos^2A - cos^2A\,sin^2B - sin^2B + cos^2A\,sin^2B$

$= cos^2A - sin^2B$

03) **மடங்குக்கோண வாய்ப்பாடுகளின் பயன்பாடு.**

உதாரணம் $i)$ $(\,sin\theta + cos\theta\,)^2 = 1 + sin2\theta$ என நிறுவுக.

LHS : $(\,sin\theta + cos\theta\,)^2$

$= sin^2\theta + 2sin\theta\,cos\theta + cos^2\theta$

$= sin^2\theta + cos^2\theta - 2sin\theta\,cos\theta$

$= 1 + sin2\theta$

உதாரணம் $ii)$ $\frac{1-cos2\theta}{1+cos2\theta} = tan^2\theta$ என நிறுவுக.

LHS : $\frac{1-cos2\theta}{1+cos2\theta}$

$= \frac{1-(1-2sin^2\theta)}{1+(2cos^2\theta-1)}$

$= \frac{2sin^2\theta}{2cos^2\theta} = tan^2\theta$

உதாரணம் $iii)$ $\frac{1}{1-tan\theta} - \frac{1}{1+tan\theta} = tan2\theta$ என நிறுவுக.

LHS : $= \frac{(1+tan\theta)-(1-tan\theta)}{(1-tan\theta)(1+tan\theta)}$

$= \frac{1+tan\theta-1+tan\theta)}{1-tan^2\theta}$

$= \frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}$

$= tan2\theta$

உதாரணம் $iv)$ $sin3\theta + sin\theta = 4\,sin\theta\,cos^2\theta$ என நிறுவுக

LHS : $sin3\theta + sin\theta$

$= 3sin\theta - 4sin^3\theta + sin\theta$

$= 4sin\theta - 4sin^3\theta$

$= 4sin\theta - 4sin^3\theta$

$= 4sin\theta\,(1 - sin^2\theta)$

$= 4sin\theta\,cos^2\theta$

உதாரணம் $v)$ $cos6\theta = 32\,cos^6\theta - 48\,cos^4\theta + 18\,cos^2\theta - 1$ என நிறுவுக

LHS : $cos6\theta$

$= \cos(\ 2 \times 3\theta)$

$= \ 2\ cos^2 3\theta - 1$

$= \ 2\ [\ 4\ cos^3\theta - 3\ cos\theta\ ]^2 - 1$

$= \ 2\ [\ 16\ cos^6\theta - 24\ cos^4\theta + 9\ cos^2\theta\ ] - 1$

$= \ 32\ cos^6\theta - 48\ cos^4\theta + 18\ cos^2\theta - 1$

உதாரணம் $vi)\ \ tan3\alpha = \dfrac{sin\alpha[3cos^2\alpha - sin^2\alpha]}{cos\alpha[cos^2\alpha - 3sin^2\alpha]}$ என நிறுவுக

RHS : $\dfrac{sin\alpha[3cos^2\alpha - sin^2\alpha]}{cos\alpha[cos^2\alpha - 3sin^2\alpha]}$

$= \dfrac{3\ sin\alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha}{cos^3\alpha - 3\ cos\alpha\ sin^2\alpha}$

$= \dfrac{\dfrac{3\ sin\alpha\ cos^2\alpha - sin^3\alpha}{cos^3\alpha}}{\dfrac{cos^3\alpha - 3\ cos\alpha\ sin^2\alpha}{cos^3\alpha}}$

$= \dfrac{\dfrac{3\ sin\alpha}{cos\alpha} - \dfrac{sin^3\alpha}{cos^3\alpha}}{1 - \dfrac{3\ sin^2\alpha}{cos^2\alpha}}$

$= \dfrac{3\ tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - 3\ tan^2\alpha} \ = \ tan\ 3\alpha$

04) **கூட்டல் விகிதங்களை பெருக்கல் விகிதங்களாக மாற்றுதல்**

உதாரணம் $i)\ \ sin3\theta + sin\theta = 4\ sin\theta\ cos^2\theta$ என நிறுவுக

LHS : $sin3\theta + sin\theta$

$= 2sin\left(\frac{3\theta+\theta}{2}\right) cos\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right)$

$= 2\, sin2\theta\, cos\theta$

$= 2\,[\,2\, sin\theta\, cos\theta\,]cos\theta$

$= 4\, sin\theta\, cos^2\theta$

உதாரணம் $ii)$ $sin75^0 - sin15^0$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$sin75^0 - sin15^0 = 2\, cos\left(\frac{75^0+15^0}{2}\right) sin(\frac{75^0-15^0}{2})$

$= 2cos45^0\, sin30^0$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

உதாரணம் $iii)$ $cos3\theta + cos\theta = 4\, cos^3\theta - 2\, cos\theta$ என நிறுவுக

LHS : $cos3\theta + cos\theta$

$= 2cos\left(\frac{3\theta+\theta}{2}\right) cos\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right)$

$= 2\, cos2\theta\, cos\theta$

$= 2\, cos\theta\,[\,2\, cos^2\theta - 1\,]$

$= 4\, cos^3\theta - 2\, cos\theta$

உதாரணம் $iv)$ $sin15^0 - sin75^0$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$sin15^0 - sin75^0 = 2\, sin\left(\frac{15^0+75^0}{2}\right) sin(\frac{75^0-15^0}{2})$

$$= 2\,sin45^0\,sin30^0$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

சுருக்கம்

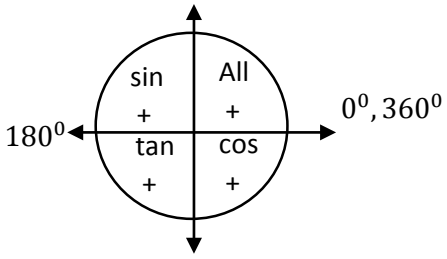
- $sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

  $cos\theta = \dfrac{\text{அயற்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

  $tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அயற்பக்கம்}}$

- திரிகோணகணித விகிதங்களின் 90^0 இன் ஒற்றை மடங்குகளில் விகிதம் மாறுபடும்.

- திரிகோணகணித விகிதங்களின் 90^0 இன் இரட்டை மடங்குகளில் விகிதம் மாறுபடாது.

- 

பயிற்சி

01) $sin\,\theta = \frac{3}{5}$ எனின் $cos\,\theta,\ tan\,\theta$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

02) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ$ எனின் பின்வருவனவற்றின்

பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

i. $sin^2\alpha + cos^2\beta + tan^2\gamma$

ii. $cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\ \alpha\, sin\,\beta$

iii. $\frac{tan\,\alpha + tan\,\gamma}{1 - tan\,\alpha\, tan\,\gamma}$

iv. $cos\,\alpha + cos\,\beta - sin\ \alpha + sin\,\beta$

03) பின்வரும் கோணங்ளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$i.\ \ sin(300^0)$ $\qquad$ $v.\ \ cosec(225^0)$

$ii.\ \ tan(330^0)$ $\qquad$ $vi.\ \ sec(135^0)$

$iii.\ cos(210^0)$ $\qquad$ $vii.\ \ sin(315^0)$

$iv.\ cot(240^0)$ $\qquad$ $viii.\ \ cot(225^0)$

04) பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

$i.\ \ tan^2\theta - sin^2\theta = sin^4\theta\, sec^2\theta$

$ii.\ \ \frac{1}{1-sin\theta} - \frac{1}{1+sin\theta} = 2\, tan\theta\, sec\theta$

$iii.\ \ tan\theta + cot\theta = sec\theta\, cosec\theta$

$vi.\ \ \frac{1}{1-cos\theta} - \frac{1}{1+cos\theta} = 2\, cosec^2\theta$

$v.\ \ \frac{sin\,2A}{1+cos\,2A} = tanA$

$vi.\ \ \frac{sin\,2A}{1-cos\,2A} = cotA$

$vii.\ \ \frac{sin\,3A}{sin\,A} - \frac{cos\,3A}{cos\,A} = 2$

$viii.\ \ \frac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A} = \tan 2A$

04) பின்வரும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$i.\ \ cosec 15^0$

$ii.\ \ cosec 75^0$

$iii.\ \ cot 15^0$

$iv.\ \ cot 105^0$

$v.\ \ sec 15^0$

$vi.\ \ sec 75^0$

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.

அத்தியாயம் - 03

எல்லைகள்

பொருளடக்கம் பக்கம்

3.1 அறிமுகம்……35

3.2 எல்லைகளின் அடிப்படை விதிகள்……39

3.3 விதிகளை பயன்படுத்தி எல்லை சார்புகள்……41

3.4 எல்லை பிரயோகங்கள்……..45

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

மாறி x இனாலான ஒரு சார்பு $f(x)$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது. உதாரணமாக $f(x) = x + 4$, $f(x) = x^2 + 3x + 5$, $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ போன்ற x இன் பல்வேறு படிகளையுடைய பல சார்புகளை குறிப்பிடலாம். இங்கு x ஆனது பெறுமானம் ஒன்றை அணுகும் போது $f(x)$ இன் போக்கும் மாற்றமடையும்.

உதாரணமாக $f(x) = x + 4$ எனும் சார்பில் x ஆனது 3 ஐ அணுகும்போது (நாடும்போது) $f(x)$ இன் மாற்றமானது x ஆனது 3 ஐ அணுகும்போதான $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானமாகும். இது பின்வருமாறு காட்டப்படும்.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x + 4 = 3 + 4 = 7$$

xஆனது 3 யை நாடும்போது $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானம்

இங்கு $x \to 3$ எனும் அணுகலானது $x = 3$ என்ற பொருளைக் குறிப்பதல்ல. அது x என்பது 3 எனும் பெறுமானத்திற்கு மிக நெருங்கிச் செல்கின்றது என்று பொருள்படும். x இன் பெறுமானமானது $-\infty$ (மறை முடிவிலி) தொடக்கம் $+\infty$ (நேர் முடிவிலி) வரை அணுகும் எல்லா சந்தர்ப்பங்களிலும் $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானத்தைக் கணிக்கலாம்.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

சார்புகளின் எல்லைப் பெறுமானங்கள் பற்றி விளக்குதல்

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் எல்லைகள் தொடர்பான விதிகளைப் பயன்படுத்தி சார்புகளின் எல்லைப் பெறுமானங்களைக் கணிக்க முடியுமாக இருப்பர்.

எல்லைகள்

அறிமுகம்

$f(x)$ என்பது x இனாலான ஒரு சார்பைக் குறிக்கின்றது.

உதாரணம் : $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = x - 5$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+5}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x^2 - 36}$$

$f(x)$ எனும் சார்பில் x ஆனது ஒரு மாறிலி a யை நாடும்போது பெறுமானம் யாது என்பது, x ஆனது அம்மாறிலியை நாடும்போது $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானம் என்பதைக் குறிக்கின்றது.

உதாரணம் 01 :

$f(x) = x^2$ எனின் $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$

x ஆனது 2 யை நாடும்போது $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானம்

உதாரணம் 02 :

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ எனின்,

$$\lim_{x \to 10} x^2 + 2x + 3 = 10^2 + (2 \times 10) + 3 = 123$$

மேலும் $f(x) = x^2 + 5$ எனும் சார்பில் x ஆனது அதிகரித்துக்கொண்டு $\pm\infty$ (நேர் அல்லது மறை முடிவிலி) யை நாடும்போது $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானமும் $+\infty$ யை அடையும்.

x ஆனது ± 10 யை நாடும்போது $f(x) = 10^2 + 5 = 105$

x ஆனது ± 100 யை நாடும்போது $f(x) = 100^2 + 5 = 10005$

x ஆனது ± 1000 யை நாடும்போது $f(x) = 1000^2 + 5 = 1000005$

இவ்வாறு,

x ஆனது $\pm\infty$ யை நாடும்போது $f(x) = +\infty$ ஆகும்.

முடிவிலி பற்றிய முடிவுகள்

01) $\frac{1}{0} = \infty$

02) $\frac{1}{\infty} = 0$

03) $\frac{1}{-\infty} = 0$

04) $\frac{\pm a}{\infty} = 0$

05) $\frac{a}{0} = \infty$

06) $\frac{-a}{0} = -\infty$

07) $\infty + \infty = +\infty$

08) $a + \infty = \infty$

09) $a - \infty = -\infty$

10) $\infty \times \infty = \infty$

11) $\frac{\infty}{a} = \infty$

12) $\frac{\infty}{-a} = -\infty$

13) $a \times \infty = \infty$

14) $-a \times \infty = -\infty$

15) n ஓர் இரட்டை எண் எனின் $(-\infty)^n = \infty$ ஆகும்

n ஓர் ஒற்றை எண் எனின் $(-\infty)^n = -\infty$ ஆகும்.

16) $\infty^n = \infty$

உதாரணம் :

$i.$ $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \infty$

$ii.$ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

$iii.$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$iv.$ $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{\infty} = 0$

$v.$ $\lim_{x \to 0} \frac{5}{x} = \frac{5}{0} = \infty$

$vi.$ $\lim_{x \to 0} \frac{x-5}{x} = \frac{-5}{0} = -\infty$

$vii.\quad \lim_{x\to\infty} 3x = 3 \times \infty = \infty$

$viii.\quad \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \times \infty = \infty$

$ix.\quad \lim_{x\to\infty} -3x = -3 \times \infty = -\infty$

$vii.\quad \lim_{x\to\infty} 5x^2 = 5 \times \infty = \infty$

$vii.\quad \lim_{x\to\infty} -5x^2 = -5 \times \infty = -\infty$

$vii.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{-4} = \frac{\infty}{-4} = -\infty$

$vii.\quad \lim_{x\to-\infty} 10 + 2x^5 = 10 + (-\infty) = 10 - \infty = -\infty$

சார்புகளின் எல்லைப் பெறுமானங்களைக் கணிக்கும்போது சில சமயங்களில் தேறா வடிவங்கள் இடம்பெற சந்தர்ப்பம் உண்டு. கணிதத்தில் தேறா வடிவம் என்பது தீர்க்க முடியாத முடிவொன்றாகும். அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் தேறா வடிவங்கள் முடிவாக வராத வண்ணம் கணித்தல்களை ஒழுங்கமைக்க வேண்டும்.

தேறா வடிவங்கள்

01. $\frac{\infty}{\infty}$ 02. $\frac{0}{0}$ 03. $\infty - \infty$

04. 0^0 05. ∞^0

உதாரணம் :

01. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1}$ என்பதன் பெறுமானத்தை நேரடியாக அவதானிக்கும் போது $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற தேறா வடிவம் கிடைக்க நேரிடும். ஆனால் அச்சார்பை பின்வருமாறு ஒழுங்கமைக்கப்படும் போது,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)\,(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} x+1 = \infty$$

02. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$

எல்லைகளின் அடிப்படை விதிகள்

விதி 01. $\lim_{x\to a} K\ f(x) = K.\ \lim_{x\to a} f(x)$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x\to 1} 3\,(x^2+5) = 3\ \lim_{x\to 1} (x^2+5) = 3 \times (1+5) = 18$

$ii)$ $\lim_{x\to\infty} 5\,x^2 = 5\ \lim_{x\to 1} x^2 = 5 \times \infty = \infty$

விதி 02. $\lim_{x\to a} K = K$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x\to 2} 4 = 4$

$ii)$ $\lim_{x\to\infty} 10 = 10$

விதி 03. $\lim_{x\to a} x = a$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x\to 2} x = 2$

$ii)$ $\lim_{y\to\infty} y = 4$

விதி 04. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x \to 2} [x^2 + x] = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} x$

$= 4 + 2$

$= 6$

$ii)$ $\lim_{x \to 1} [x^2 + 3x - 1] = 1 + 3 - 1$

$= 3$

விதி 05. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x \to 2} [x^2 - x] = \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} x$

$= 4 - 2$

$= 2$

$ii)$ $\lim_{x \to 1} [x^2 - 3x - 1] = 1 - 3 - 1$

$= -3$

விதி 06. $\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$

உதாரணம் :

$i)$ $\lim_{x \to 3} (x + 5)(x - 4) = \lim_{x \to 3} (x + 5) \times \lim_{x \to a} (x - 4)$

$= 8 \times (-1)$

$= (-8)$

$ii)$ $\lim_{x \to 3} (x - 2)(x - 3)(x - 4) = 1 \times 0 \times (-1) = 0$

விதி 07. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

உதாரணம் :

$i)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+5}{\lim\limits_{x\to 1} x+1}$

$= \frac{6}{2}$

$= 3$

$ii)\ \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)\,(x-3)\,(x-4)}{x^2+5} = \frac{1\times\ 0\times(-1)}{9+5}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

எல்லை விதிகளை பயன்படுத்தி எல்லை சார்புகள்

நுட்பம் 01 : காரணிப்படுத்தி வகுத்தல்

$i)\quad \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 3} x\,\frac{(x-1)\,(x+1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 3} (x+1)$

$= 3+1$

$= 4$

[ii] $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\,(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} x$

$= 1$

[iii] $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\ (x+1)}{x-3}$

$= \lim_{x\to 3} 3+1$

$= 4$

[iv] $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-7x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\ (x-1)}{(x-4)\ (x-3)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)}{(x-4)}$

$= \frac{2}{-1}$

$= -2$

நுட்பம் 02 : உடன் புணரியால் பெருக்குதல்

[i] $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}\ -1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}\ -1} \times \frac{\sqrt{x+1}\ +1}{\sqrt{x+1}\ +1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\ (\sqrt{x+1}\ +1)}{(x+1)-1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\ (\sqrt{x+1}\ +1)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} (\sqrt{x+1}\ +\ 1)$

$= \lim_{x\to 0} 1+1$

$= 2$

[ii] $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2\ -1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2\ -1} \times \frac{\sqrt{3+x}\ +\sqrt{5-x}}{\sqrt{3+x}\ +\sqrt{5-x}}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(3+x)-(5-x)}{(x-1)\ (x+1)\ (\sqrt{3+x}\ +\sqrt{5-x})}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{2\ (x-1)}{(x-1)\ (x+1)\ (\sqrt{3+x}\ +\sqrt{5-x})}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

[iii] $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)\ (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2})}{(3x-2) - (x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)\ (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2})}{2\ (x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\ (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2})}{2}$$

$$= \frac{4\ (2+2)}{2}$$

$$= 8$$

[iv] $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{1 + x + x^2} + 1}{\sqrt{1 + x + x^2} + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2 - 1}{x\ (\sqrt{1 + x + x^2} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\,(x+1)}{x\ (\sqrt{1 + x + x^2} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{(\sqrt{1 + x + x^2} + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

நுட்பம் 03 : பொதுக்காரணியை வேறுபடுத்தி வகுத்தல்

[i] $$\lim_{x\to\infty} \frac{x + 2}{x + 5} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ (1 + \frac{2}{x})}{x\ (1 + \frac{5}{x})}$$

$$= \frac{(1 + \frac{2}{\infty})}{(1 + \frac{5}{\infty})}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

[ii] $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+ 2}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ (1 + \frac{2}{x})}{x^2\ (3 + \frac{5}{x^2})}$$

$$= \frac{1}{\infty} \quad \frac{[1 + 0]}{[3 + 0]}$$

$$= 0$$

[iii] $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 4x + 1}{6x^3 + 3x^2 + 3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\ (3 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3\ (6 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3})}$$

$$= \frac{3 + 0 + 0}{6 + 0 + 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

[iv] $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 + x^3}{4x^4 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5\ (3 + \frac{1}{x^2})}{x^4\ (4 - \frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\ (3 + \frac{1}{x^2})}{(4 - \frac{3}{x^2})}$$

$$= \frac{\infty\ (3 + 0)}{(4 - 0)}$$

$$= \infty$$

எல்லைப் பிரயோகங்கள்

n என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணாகவோ, மறை முழு எண்ணாகவோ அல்லது ஒரு பின்னமாகவோ உள்ளபோது, $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}}$ ஆகும்.

இதனை பின்வருமாறு நிறுவிக்காட்லாம்

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2}.a + a^{n-3}.a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1}$$

$$= na^{n-1}$$

01] n என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணாக உள்ளபோது,

i] $\lim_{x\to 2}\frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^4 - 2^4}{x - 2}$

$= 4 \times 2^{4-1}$

$= 4 \times 2^3$

$= 32$

ii] $\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 3^3}{x - 3}$

$= 3 \times 3^{3-1}$

$= 3 \times 3^2$

$= 27$

02] n என்பது ஒரு மறை முழு எண்ணாக உள்ளபோது,

i] $\lim_{x\to 2}\frac{x^{-4} - 2^{-4}}{x - 2} = (-4) \times 2^{-4-1}$

$= -4 \times \frac{1}{2^5} = \frac{-4}{32}$

ii] $\lim_{x\to 1} \frac{x^{-10} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{-10} - 1^{-10}}{x - 1}$

$= (-10) \times 1^{-10-1}$

$= (-10) \times 1^{-11}$

$= -10$

03] n என்பது ஒரு பின்னமாக உள்ளபோது,

i] $\lim_{x\to 125} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 5}{x - 125} = \lim_{x\to 125} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 125^{\frac{1}{3}}}{x - 125}$

$= \frac{1}{3} \times 125^{\frac{1}{3}-1}$

$= \frac{1}{3} \times 125^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{(5^3)^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^2}$

$= \frac{1}{3 \times 25}$

$= \frac{1}{75}$

ii] $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{2}{5}} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 2} \frac{x^{\frac{2}{5}} - 1^{\frac{2}{5}}}{x - 1}$

$= \frac{2}{5} \times 1^{\frac{2}{5}-1}$

$= \frac{2}{5} \times 1^{\frac{-3}{5}} = \frac{2}{5}$

சுருக்கம்

- மாறி x ஆனது a ஐ அணுகும்போது (நாடும்போது) $f(x)$ இன் மாற்றமானது x ஆனது a ஐ அணுகும்போதான $f(x)$ இன் எல்லைப் பெறுமானமாகும். இது $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ என எழுதப்படும்.
- சார்புகளின் ஏல்லைப் பெறுமானங்களைக் கணிக்கும்போது தேறா வடிவங்கள் முடிவாக வராத வண்ணம் கணித்தல்களை ஒழுங்கமைக்க வேண்டும்
- n என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணாகவோ, மறை முழு எண்ணாகவோ அல்லது ஒரு பின்னமாகவோ உள்ளபோது $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ ஆகும்.

பயிற்சி

(01) பெறுமானம் காண்க

i. $\lim\limits_{x\to 5} x^2$ ii. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 + 8x + 1$

iii. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$ iv. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{10}{x}$

v. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-10}{x}$ vi. $\lim\limits_{x\to -\infty} 5 + 3x^3$

(02) பெறுமானம் காண்க

i. $\lim\limits_{x\to 2} 2\,(x^3 + 6)$ ii. $\lim\limits_{x\to \infty} 10\,x^3$

iii. $\lim\limits_{x\to 5} 10$ iv. $\lim\limits_{x\to \infty} 5$

v. $\lim\limits_{x\to 1} [\,x^3 + x\,]$ vi. $\lim\limits_{x\to 3} [\,x^3 + x - 4\,]$

vi. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{10}{x^3}$ viii. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x+2}{-4}$

(03) பெறுமானம் காண்க

i. $\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-1)}{x-1}$ ii. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

iii. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x-5}$ iv. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

v. $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}\ -\ 2}{x^2-\ 36}$ vi. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7+x}\ -\sqrt{7-x}}{x}$

vii. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ 10}{x\ +\ 4}$ viii. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3\ +3x\ +\ 4}{5x^3+\ x^2\ +7}$

ix. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ 5}{7x^2\ +\ 4}$ x. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3\ +\ x^5}{3x^2\ -\ x^4}$

(04) பெறுமானம் காண்க

i. $\lim_{x\to 4}\frac{x^4-\ 256}{x\ -4}$ ii. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-\ 81}{x\ -3}$

iii. $\lim_{x\to 2}\frac{x^{-5}-\ 2^{-5}}{x\ -2}$ iv. $\lim_{x\to 10}\frac{x^{-2}-\ 10^{-2}}{x\ -10}$

v. $\lim_{x\to 1000}\frac{x^{\frac{1}{3}}-\ 10}{x\ -1000}$ vi. $\lim_{x\to 32}\frac{x^{\frac{1}{5}}-\ 2}{x\ -32}$

(04) $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-\ 2^n}{x\ -2}\ =80$ எனின் n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Berkery, D. D. (1994). *Calculus* (5th ed.). London: Ietts Education Ltd.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.

அத்தியாயம் - 04

வகையீடு

பொருளடக்கம் பக்கம்

4.1 அறிமுகம்.....51

4.2 வகையீட்டு விதிகள்.....55

4.3 விதிகளை பயன்படுத்தி வகையிட்டு செய்கைகள்...60

4.4 வகையீட்டின் பிரயோகங்கள்.....68

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

y அல்லது $f(x)$ என்பது x இன் சார்பு எனக் கொள்வோம். பொதுவாக x இல் உண்டாகும் மாற்றத்திற்கு ஒத்ததாக y இலும் மாற்றம் ஏற்படும். ஓவ்வொறு மாறியிலும் ஏற்படும் மிகச்சிறிய மாற்றத்தை ஏற்றம் என அழைக்கின்றோம். இது நேரானதாகவோ அல்லது மறையானதாகவோ இருக்கலாம். x இல் ஏற்படும் ஏற்றத்தை δx அல்லது Δx அல்லது h இனால் குறிக்கலாம். இதற்கு ஒத்ததாக y இல் ஏற்டும் ஏற்றத்தை δy அல்லது Δy அல்லது k இனால் குறிக்கலாம்.

δx பூச்சியத்தை அணுகும் போது δy இற்கும் δx இற்கும் இடையிலான விகிதத்தின் எல்லைப் பெறுமானம் சார்பு y இன் வகையீடு என கணிதத்தில் வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

வகையீடு தொடர்பான விளக்கத்தைப் பெற்று சார்புகளின் வகையீடுகளை ஆராய்தல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் சார்புகளை முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிட முடியுமாக இருப்பர்.

சார்புகளை வகையிட வகையீட்டு விதிகளைப் பயன்படுத்திக் கொள்வர்.

வகையீட்டினைப் பயன்படுத்தி நேர்கோடுகள், இருபடிச் சார்புகள் போன்றவற்றின் தன்மைகளை ஆராய்வர்.

வகையீடு (Differentiation)

$f(x)$ என்பது x இன் ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். இது $y = f(x)$ என எழுதப்படலாம்.

உதாரணம் :

$f(x) = y = x + 4$

$f(x) = y = x^2 - 5$

$f(x) = y = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$

இங்கு x இல் ஏற்படும் ஒரு சிறிய மாற்றம் δx இன் விளைவாக y இல் ஏற்பட்ட மாற்றம் δy என்க. இது $f(x + \delta x) = y + \delta y$ என காட்டப்படும்.

உதாரணம் :

$f(x + \delta x) = y + \delta y = (x + \delta) + 4$

$f(x + \delta x) = y + \delta y = (x + \delta x)^2 - 5$

$f(x + \delta x) = y + \delta y = (x + \delta x)^3 + 2(x + \delta x)^2 + 5(x + \delta x) - 3$

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ என்பது $f(x)$ இன் x குறித்த வகையீடு என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும். $f(x)$ இன் வகையீடு $f'(x)$ என குறிப்பிடப்படும்.

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}}$$

இங்கு x இன் பல்லுறுப்பியானது y இல் எடுத்துரைக்கப்படும் போது x குறித்தான y இன் வகையீடு $\frac{dy}{dx}$ என குறிப்பிடப்படும்.

$$f(x) = y \quad \Longrightarrow \quad f(x+\delta x) = y + \delta y$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{y+\delta y-y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}}$$

குறிப்பு :

01. $\frac{dy}{dx}$ என்பது x குறித்து சார்பு y இன் வகையீடாகும்.

02. $\frac{du}{dx}$ என்பது x குறித்து சார்பு u இன் வகையீடாகும்.

03. $\frac{d\,f(x)}{dx}$ என்பது x குறித்து $f(x)$ இன் வகையீடாகும்.

04. K ஒரு மாறிலி எனின் $\frac{d\,K}{dx}$ என்பது K யின் வகையீடாகும்.

உதாரணம் : 01

$y = x^2 + 2$ என்ற சார்பின் x குறித்த வகையீடை கருதினால் x இல் ஏற்பட்ட சிறிய மாற்றம் δx இன் விளைவாக y இல் ஏற்பட்ட மாற்றம் δy என்க.

$$y = x^2 + 2$$

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 + 2$$

$$\delta y = (x + \delta x)^2 + 2 - \mathrm{y}$$

$$\delta y = x^2 + 2\,x\,\delta x + \delta x^2 + 2 - (x^2 + 2)$$

$$\delta y = x^2 + 2\,x\,\delta x + \delta x^2 + 2 - x^2 - 2)$$

$$\delta y = 2\,x\,\delta x + \delta x^2$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta \mathrm{x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (\,2x + \delta \mathrm{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

உதாரணம் : 02

$f(x) = x^2$ என்ற சார்பின் x குறித்த வகையீடை கருதினால் x இல் ஏற்பட்ட சிறிய மாற்றம் δx என்க.

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x + \delta x) = (x + \delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\delta x + \delta x^2 - x^2}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2x\,\delta x + \delta x^2}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x)$$

$$= 2x$$

மேலுள்ள இரு உதாரணங்களிலுமுள்ள வகையீட்டு முறைமை முதல் தத்துவத்திலிருந்தான வகையீடு என அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் : பின்வருவனவற்றை முதல் தத்துவத்திலிருந்து வகையிடுக.

i] $y = x^2 + x + 1$

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 + (x + \delta x) + 1$$

$$\delta y = (x + \delta x)^2 + (x + \delta x) + 1 - y$$

$$\delta y = (x + \delta x)^2 + (x + \delta x) + 1 - (x^2 + x + 1)$$

$$\delta y = \delta x^2 + 2x\delta x + \delta x$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x^2 + 2x\delta x + \delta x}{\delta x}$$

$$= \delta x + 2x + 1$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (\delta x + 2x + 1)$$

$$= 2x + 1$$

ஆகவே $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

ii] $f(x) = 2x + 3$

$$f(x) = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f(x + \delta x) = 2(x + \delta x) + 3$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2(x+\delta x) + 3 - (2x+3)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2x + 2\delta x + 3 - 2x - 3}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{2\delta x}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 2$$

$$= 2$$

வகையீட்டின் அடிப்படை விதிகள்

குறிப்பு : பின்வரும் விதிகள் யாவும் முதல் தத்துவத்திலிருந்தான வகையீட்டு முறையின் மூலம் நிறுவப்பட்டுள்ளது. விதிகள் யாவற்றையும் நேரடியாகப் பயன்படுத்தி வகையீட்டுக் கணித்தல்களை மேற்கொள்ளலாம்.

விதி 01

K ஒரு மாறிலியாக உள்ளபோது $f(x) = K$ எனின், $f'(x) = 0$ ஆகும்

$$f(x) = K \quad \Longrightarrow \quad f(x + \delta x) = K$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{K - K}{\delta x} \quad = \lim_{\delta x \to 0} \frac{0}{\delta x} \quad = 0$$

விதி 02

$f(x) = x^n$ எனின், $f'(x) = n\, x^{n-1}$ ஆகும்

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f(x + \delta x) = (x + \delta x)^n$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x + \delta x) - x}$$

$$= \quad n\, x^{n-1}$$

விதி 03

K ஒரு மாறிலியாக உள்ளபோது $f(x) = K \times g(x)$ எனின், $f'(x) = K.\ g'(x)$ ஆகும்

$$f(x) = K \times g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x+\delta x) = K \times g(x+\delta x)$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{K.\ g(x+\delta x) - K.\ g(x)}{\delta x}$$

$$= \mathrm{K} \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$$

$$= \mathrm{K}.\ g'(x)$$

விதி 04

$f(x) = g(x) + g(x)$ எனின், $f'(x) = g'(x) + q'(x)$ ஆகும்

$$f(x) = g(x) + g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x+\delta x) = g(x+\delta x) + q(x+\delta x)$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{\, g(x+\delta x) + q(x+\delta x\,\} - \{\, g(x) + q(x)\,\}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{\, g(x+\delta x) - g(x)\,\} + \{\, q(x+\delta x\,\} - q(x)\,\}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{\, g(x+\delta x) - g(x)\,\}}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{\, q(x+\delta x) - q(x)\,\}}{\delta x}$$

$$= \quad g'(x) + q'(x)$$

விதி 05

$f(x) = g(x) - q(x)$ எனின், $f'(x) = g'(x) - q'(x)$ ஆகும்

$$f(x) = g(x) - q(x) \implies f(x+\delta x) = g(x+\delta x) - q(x+\delta x)$$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{g(x+\delta x) - q(x+\delta x\} - \{g(x) - q(x)\}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{g(x+\delta x) - g(x)\} - \{q(x+\delta x\} - q(x)\}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{g(x+\delta x) - g(x)\}}{\delta x} - \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{q(x+\delta x) - q(x)\}}{\delta x}$$

$$= g'(x) - q'(x)$$

விதி 06

$f(x) = g(x)^n$ எனின், $f'(x) = n.\ g(x)^{n-1} \times g'(x)$ ஆகும்

$f(x) = y = g(x)^n$ என்க

$g(x) = u$ என்க $\implies \frac{du}{dx} = g'(x)$

ஆகவே, $y = u^n \implies \frac{dy}{du} = n.u^{n-1}$

x இல், y இல், u இல் ஏற்படும் மாற்றங்கள் என்பன முறையே $\delta x, \delta y, \delta u$ எனக் கொள்க

இங்கு $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \times \frac{\delta u}{\delta x}$ என எழுத முடியும்.

ஆகவே, $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \times \frac{\delta u}{\delta x}\right)$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = n.u^{n-1} \times g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = n.g(x)^{n-1} \times g'(x)$$

விதி 07

$f(x) = g(x).q(x)$ எனின் $f'(x) = g(x).q'(x) + q(x).g'(x)$ ஆகும்

$f(x) = g(x).q(x) \implies f(x+\delta x) = g(x+\delta x)\,.\,q(x+\delta x)$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x)\,.\,q(x+\delta x) - g(x).q(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x)\ \{\,q(x+\delta x) - q(x)\,\} + q(x)\ \{\,g(x+\delta x) - g(x)\,\}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x)}{1} . \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{q(x+\delta x) - q(x)\}}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{q(x)}{1} . \lim_{\delta x \to 0} \frac{q(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$$

$$= g(x).\ q'(x) + q(x).\ g'(x)$$

விதி 08

$f(x) = \frac{g(x)}{q(x)}$ எனின் $f'(x) = \frac{q(x)\,.\,g'(x) - g(x)\,.\,q\prime(x)}{[q(x)]^2}$ ஆகும்

$u = g(x), \quad v = q(x)$ என்க. $\quad y = \frac{u}{v} \implies y = u.v^{-1}$

$u = g(x) \implies \frac{du}{dx} = g'(x)$

$v = q(x) \implies v^{-1} = [q(x)]^{-1} \implies \frac{dv^{-1}}{dx} = -q(x)^{-2} \times q'(x) = \frac{-q\prime(x)}{[q(x)]^2}$

$$y = u.v^{-1} \implies \frac{dy}{dx} = v^{-1}.\frac{du}{dx} + u\,.\frac{dv^{-1}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\,.g'(x) + u\,.\frac{-q\prime(x)}{[q(x)]^2}$$

$$= \frac{1}{q(x)}\,.g'(x) + g(x)\,.\frac{-q\prime(x)}{[q(x)]^2}$$

$$= \frac{q(x)}{q(x)^2}\,.g'(x) - g(x)\,.\frac{q\prime(x)}{[q(x)]^2}$$

$$= \frac{q(x)\,.\,g'(x) - g(x)\,.q'(x)}{[q(x)]^2}$$

விதி 09

$f(x) = e^x$ எனின் $f'(x) = e^x$ ஆகும்

$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\times1} + \frac{x^3}{3\times2\times1} + \frac{x^4}{4\times3\times21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$ ஆகும்.

$f(x) = e^x$ எனின்

$$f'^{(x)} = 0 + \frac{1}{1} + \frac{2x}{2\times1} + \frac{3x^2}{3\times2\times1} + \frac{4x^3}{4\times3\times2\times1} + \ldots\ldots\ldots.. + \infty$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\times1} + \frac{x^3}{3\times2\times1} + \frac{x^4}{4\times3\times21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

$$= e^x$$

விதி 10

$f(x) = \ln x$ எனின் $f'(x) = \frac{1}{x}$ ஆகும்

$\ln x = \log_e x$ ஆகும்.

$y = \log_e x$ எனின் $e^y = x$ ஆகும்.

x குறித்து வகையிட $e^y . \frac{dy}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

விதிகளைப் பயன்படுத்தி வகையீட்டுச் செய்கைகள்

விதி 01 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = 5$ எனின் $f'^{(x)} = 0$

ii] $f(x) = -7$ எனின் $f'^{(x)} = 0$

iii] $f(x) = -\frac{3}{5}$ எனின் $f'^{(x)} = 0$

விதி 02 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = x$ எனின் $f'(x) = 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1$

ii] $f(x) = x^2$ எனின் $f'(x) = 2 \times x^{2-1} = 2 \times x^1 = 2x$

iii] $f(x) = x^{-5}$ எனின் $f'(x) = -5 \times x^{-5-1} = -5x^{-6}$

iv] $f(x) = \sqrt{x}$ எனின்

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

vi] $f(x) = \frac{1}{x^3}$ எனின்

$$f(x) = x^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -3 \times x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

v] $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ எனின்

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{4}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{4} \times x^{-\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4x^{\frac{5}{4}}}$$

விதி 03 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = 2x$ எனின் $f'(x) = 2\times 1 = 2$

ii] $f(x) = -3x$ எனின் $f'(x) = -3 \times 1 = -3$

iii] $f(x) = -\frac{2}{3}x$ எனின் $f'(x) = -\frac{2}{3} \times 1 = -\frac{2}{3}$

iv] $f(x) = 2x^3$ எனின் $f'(x) = 2\times 3 \times x^{3-1}$

$$= 2\times 3 \times x^2$$

$$= 6x^2$$

iv] $f(x) = -10x^5$ எனின் $f'(x) = -10 \times 5 \times x^{5-1}$

$$= -50\, x^4$$

v] $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ எனின்

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4 \times \frac{1}{3} \times x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$$

vi] $f(x) = \frac{-3}{x^3}$ எனின்

$$f(x) = -3x^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f'^{(x)} = (-3) \times (-3) \times x^{-3-1}$$

$$= 9x^4$$

விதி 04, விதி 05 என்பவற்றின் பயன்பாடு

i] $f(x) = 16x - 8$ எனின் $f'^{(x)} = 16 - 0$

$$= 16$$

ii] $f(x) = 6x^2 - x$ எனின் $f'^{(x)} = 6 \times 2 \times x^{2-1} - 1$

$$= 12\,x - 1$$

iii] $f(x) = -3x^{-3} + 2x^5 - 3x^2$ எனின்

$$f'(x) = (-3 \times -3 \times x^{-3-1}) + (2 \times 5 \times x^{5-1}) - (3 \times 2 \times x^{2-1})$$

$$= 9x^{-4} + 10x^4 - 6x$$

iv] $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} + (-\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}})$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

v] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + (\sqrt[4]{x})^3$

$$= x^{-\frac{1}{2}} + \ (x^{\frac{1}{4}})^3$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} + \ x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} + \frac{3}{4} \times x^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \times x^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$$

விதி 06 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = (3x+7)^4$

$$f'(x) = \{\, 4\,(3x+7)^{4-1} \,\} \times \frac{d\,(3x+7)^3}{dx}$$

$$= 4\,(3x+7)^{4-1} \times \{\,(3 \times 1) + 0\,\}$$

$$= 4\,(3x+7)^3 \times 3$$

$$= 12\,(3x+7)^3$$

ii] $f(x) = (5x^3 - 3x^2 + 7)^9$

$$f'(x) = 9\,(5x^3 - 3x^2 + 7)^{9-1} \times \frac{d\,(5x^3-3x^2+7)^8}{dx}$$

$$= 9\,(5x^3 - 3x^2 + 7)^8 \times \{\, 5 \times 3 \times x^{2-1} - 3 \times 2 \times x^{2-1} + 0 \,\}$$

$$= 9\,(5x^3 - 3x^2 + 7)^8 \times (\,15x^2 - 6x\,)$$

iii] $f(x) = \frac{1}{6x+5}$

$$= (6x+5)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(6x+5)^{-1-1} \times \{6 \times 1 - 0\}$$

$$= -1(6x+5)^{-2} \times 6$$

$$= \frac{-6}{(6x+5)^2}$$

iv] $f(x) = \sqrt{3x^3 + 5x}$

$$= (3x^3 + 5x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x+5)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \times \{3 \times 3 \times x^{3-1} + 5 \times 1\}$$

$$= \frac{1}{2}(3x+5)^{-\frac{1}{2}} \times (9x^2 + 5)$$

$$= \frac{9x^2+5}{2\sqrt{(3x+5)}}$$

விதி 07 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = (x+2)(2x+3)^3$

$g(x) = (x+2)$, $q(x) = (2x+3)^3$ எனக் கொள்வோம்

$$f'(x) = (x+2)[3(2x+3)^2 \times 2] + (2x+3)^3 \times 1$$

$$= (2x+3)^2 [6(x+2) + (2x+3)]$$

$$= (2x+3)^2 (8x+15)$$

ii] $f(x) = x^2 \sqrt{3x+5}$

$g(x) = x^2$, $q(x) = (3x+5)^{\frac{1}{2}}$ எனக் கொள்வோம்

$$f'^{(x)} = x^2 \times \frac{1}{2}(3x+5)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \times (3 \times 1 + 0) + \sqrt{3x+5} \times 2x$$

$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{3x+5}} + 2x\sqrt{3x+5}$$

$$= \frac{3x^2 + 4x\,(3x+5)}{2\sqrt{3x+5}}$$

$$= \frac{x\,(3x+12x+20)}{2\sqrt{3x+5}}$$

$$= \frac{5x\,(3x+4)}{2\sqrt{3x+5}}$$

விதி 08 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

$g(x) = (2x+3)$, $q(x) = (x-2)$ எனக் கொள்வோம்

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,g'(x) - (2x+3)\,q'(x)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2) \times 2 - (2x+3) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x-4-2x-3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{(x-2)^2}$$

ii] $f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$

$g(x) = x^2 + 3$, $q(x) = x^{\frac{1}{2}}$ எனக் கொள்வோம்

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}\,g'(x) - (x^2+3)\,q'(x)}{(\sqrt{x})^2}\,2$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} \times 2x - (x^2+3) \times \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}}{x}$$

$$= \frac{4x^2-(x^2+3)}{2\,x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\,(x^2-1)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

விதி 09 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = e^{2x}$

$$f'^{(x)} = e^{2x} \times \frac{d\,(2x)}{dx}$$

$$= e^{2x} \times 2$$

$$= 2e^{2x}$$

ii] $f(x) = e^{3x} + e^{2x} + 2$

$$f'(x) = e^{3x} \times 3 + e^{2x} \times 2 + 0$$

$$= 3e^{3x} + 2e^{2x}$$

iii] $f(x) = x^3\, e^{x+1}$

$$f'(x) = x^3 \times e^{x+1} \times 1 + e^{x+1} \times 3x^2$$

$$= x^2 \; e^{x+1}\,(x+3)$$

iv] $f(x) = e^{(x^2+1)^3}$

$$f'(x) = e^{(x^2+1)^3} \times \frac{d\,(x^2+1)^3}{dx}$$

$$= e^{(x^2+1)^3} \times 3 \times (x^2+1)^2 \times 2x$$

$$= 6x\, e^{(x^2+1)^3} \times (x^2+1)^2$$

விதி 10 இன் பயன்பாடு

i] $f(x) = \ln\sqrt{x^3 + 5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+5x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^3+5x}} \times (3x^2 + 5)$$

$$= \frac{3x^2+5}{2\,(x^3+5x)}$$

ii] $f(x) = x\ \ln x$

$$f'(x) = x \times \frac{1}{x} + \ \ln x \times 1$$

$$= 1 + \ \ln x$$

iii] $f(x) = \ \ln\sqrt{\frac{x^3+3}{4x-5}}$

$$= \frac{1}{2}\ \ln\frac{x^3+3}{4x-5}$$

$$= \frac{1}{2}\ [\ \ln(x^3 + 3)\ -\ \ln(4x - 5)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln(x^3 + 3)\ -\ \frac{1}{2}\ln(4x - 5)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3+3} \times 3x^2\ -\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{4x-5} \times 4$$

$$= \frac{3x^2}{x^3+3} - \frac{2}{4x-5}$$

குறிப்பு : $\ln(u\,v) = \ \ln u + \ \ln v$

$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ \ln u - \ \ln v$

வகையீட்டின் பிரயோகங்கள்

அடுத்தடுத்து வகையிடல்

x எனும் பல்லுறுப்பி $f(x)$ இல் எடுத்துரைக்கப்படும் போது 1ம், 2ம், 3ம், 4ம்…… வகையீடுகள் என்பன முறையே $f'(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$ … … … .. என்றவாறு குறிப்பிடப்படும்.

x எனும் பல்லுறுப்பி y இல் எடுத்துரைக்கப்படும் போது 1ம், 2ம், 3ம், 4ம்…… வகையீடுகள் என்பன முறையே $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ … … … .. என்றவாறு குறிப்பிடப்படும்.

உதாரணம்

i] $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x$ என்பதை வகையிட

$$f'^{(x)} = (4 \times 3 \times x^2) + (3 \times 2 \times x) + 5$$

$$= 12\,x^2 + 6x + 5$$

$f'(x)$ என்பதை மீண்டும் வகையிட

$$f'(x) = 12\,x^2 + 6x + 5$$

$$f^2(x) = 12 \times 2 \times x + 6 + 0$$

$$= 24\,x + 6$$

$f^2(x)$ என்பதை மீண்டும் வகையிட

$$f^2(x) = 24\,x + 6$$

$$f^3(x) = 24$$

$f^3(x)$ என்பதை மீண்டும் வகையிட

$f^3(x) = 24$

$f^4(x) = 0$

ii] $y = e^{2x+1}$ என்பதை வகையிட

$\frac{dy}{dx} = e^{2x+1} \times 2$

$= 2\, e^{2x^2+1}$

$\frac{dy}{dx} = 2\, e^{2x^2+1}$ என்பதை மீண்டும் வகையிட

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \times e^{2x^2+1} \times 2$

$= 4\, e^{2x^2+1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\, e^{2x^2+1}$ என்பதை மீண்டும் வகையிட

$\frac{d^3y}{dx^3} = 4 \times e^{2x^2+1} \times 2$

$= 8\, e^{2x^2+1}$

நேர்கோடு ஒன்றின் படித்திறன் காணல்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$ அல்லது $ax + by + c = 0$ எனும் வடிவங்களில் காட்டப்படும்.

$y = mx + c \quad \Longrightarrow$ படித்திறன் $= m$

$ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow$ படித்திறன் $= -\frac{a}{b}$

ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டினை வகையிடும்போது $\frac{dy}{dx}$ ஆனது படித்திறனைத் தரும்.

உதாரணம் :

i] $y = 4x + 3$

$\frac{dy}{dx} = 4$ $\Longrightarrow$ ஆகவே படித்திறன் $= 4$

ii] $10x + 4y - 6 = 0$

$$10 + 4 \times \frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$4 \times \frac{dy}{dx} = -10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10}{4}$$

$= -\frac{5}{2}$ $\Longrightarrow$ ஆகவே படித்திறன் $= -\frac{5}{2}$

இருபடிச் சார்பின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டை காணல்.

ஒரு இருபடிச் சார்பின் பொது வடிவம் $ax^2 + bx + c = y$ ஆகும். இங்கு சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடானது $x = -\frac{b}{a}$ ஆகும். சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டைக் கொண்டு திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறைக் கணிப்பிடலாம்.

இருபடிச் சார்பை வகையிடும் போது $\frac{dy}{dx} = 0$ இன் பெறுமானமானது சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டைத் தரும்

உதாரணம் :

i. $y = x^2 - 2x - 8$ எனும் சார்பை x குறித்து வகையிடும் போது

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும் போது சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு கிடைக்கும்

ஆகவே $2x - 2 = 0$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$x = 1$ எனும் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டைக் கொண்டு சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறைக் காணலாம

$y = 1^2 - 2 \times 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$

ஆகவே திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறு $= (1, -9)$

குறிப்பு : சார்பு $y = f(x)$ யின் உயர்வு, இழிவுப்புள்ளிகளில் $f'(x) = 0$ ஆகும்.

சுருக்கம்

- $f(x)$ எனும் சார்பின் x குறித்தான வகையீடு $f'(x)$ எனவும், y எனும் சார்பின் x குறித்தான வகையீடு $\frac{dy}{dx}$ எனவும் குறிப்பிடப்படும்.
- ஒரு சார்பினை முதல் தத்துவத்திலிருந்தும், வகையீட்டின் விதிகளை நேரடியாகப் பயன்படுத்தியும் வகயிட முடியும்.
- நேர்கோடு ஒன்றின் சமன்பாடை வகையிடுவதன் மூலம் படித்திறனையும், இருபடிச் சார்பினை வகையிடுவதன் மூலம் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறையும் காணலாம்.

பயிற்சி

01) முதல் தத்துவத்தை பயன்படுத்தி பின்வரும் சார்பின் வகையீட்டை காண்க.

$$y = x^2 + \frac{2}{x} - 3$$

02) பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

i] $\frac{d}{dx}\{x^{12}\}$ ii] $\frac{d}{dx}\{x^{-6}\}$

iii] $\frac{d}{dx}\left\{x^{\frac{2}{3}}\right\}$ iv] $\frac{d}{dx}\{\sqrt[3]{x}\}$

v] $\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}$ vi] $\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right\}$

03) பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

i) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ii) $y = (3x - 1)^2$

iii) $y = 5x^2 - 2x^2 + \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{1}{x} - 6$

vi) $y = e^{2x}(x^2 - ln\, x)$

v) $y = 2e^{3x-1}x - 1$

iv) $y = (x^2 - x + 1)^{12}$

vii) $y = \left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right)$

viii) $y = \ln\frac{(x-5)}{5-11x^2}$

04) $y = \frac{x^2}{1-x}$ எனின் $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2$ என நிறுவுக.

05) பின்வரும் நேர்கோடுகளின் படித்திறனைக் காண்க.

i. $y = -4x + 5$

ii. $y = \frac{3}{5}x + 1$

iii. $6x - 2y - 7 = 0$

06) பின்வரும் சார்புகளின் உயர்வு, இழிவுப் புள்ளிகளைக் காண்க.

i. $y = (x+1)^2(2-x)$

ii. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x - 4$

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Berkery, D. D. (1994). *Calculus* (5th ed.). London: Ietts Education Ltd.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.

அத்தியாயம் - 05

தொகையீடு

பொருளடக்கம் பக்கம்

5.1 அறிமுகம்……..75

5.2 தெகையீட்டு விதிகள்……76

5.3 விதிகளை பயன்படுத்தி தெகையீட்டு செய்கைகள் ……77

5.4 தெகையீட்டின் பிரயோகங்கள்……..82

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

வகையீட்டிற்கு நேர்மாறான செய்கையே தொகையீடு என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகிறது. $f(x)$ எனும் சார்பின் x குறித்த தொகையீடானது $\int f(x)\,dx$ என குறிப்பிடப்படும். சார்பொன்றை மீண்டும் மீண்டும் வகையிட அச்சார்பு சுருங்கிக்கொண்டு செல்வது போல் சார்பொன்றை மீண்டும் மீண்டும் தொகையிடும்போது அச்சார்பு விரிவடைந்துகொண்டு செல்வதையும் அவதானிக்க முடியும்.

தரப்படும் சார்புகளை இலகுவான வடிவில் ஒழுங்கமைப்பதின் நுட்பங்களை பயன்படுத்துவதன் முலம் தொகையிடுவது பற்றி இவ்த்தியாயம் விளக்குகிறது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

சார்புகளின் தொகையீட்டுச் செய்கைகளை விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் வகையீட்டிற்கும் தொகையீட்டிற்கும் இடையிரான பொருத்தப்பாட்டை விளக்க முடியுமாக இருப்பர்.

தொகையீட்டின் விதிகளைப் பணன்படுத்தி சார்புகளை தொகையிடுவர்..

தொகையீட்டினை வரையறுத்த பெறுமானங்களை ஆராய்ந்து

கொள்வர்.

தொகையீடு (Integration)

வகையீட்டின் நேர்மாறான செயற்பாடு தொகையீடாகும்.

$f(x)$ என்ற சார்பை x குறித்து வகையிட்டால் கிடைக்கும் சார்பு $f'(x)$ எனின், $f'(x)$ யை x குறித்து தொகையிட கிடைக்கும் சார்பு $f(x)$ ஆகும்.

அதாவது,

$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ எனின்

சார்பு $f'(x)$ இன் தொகையீடு $\int f'(x)\ dx$ என எழுதப்படும்.

$\int f'(x)dx = f(x) + c$ ஆகும்.

இங்கு c என்பது தொகையீட்டு மாறிலி எனப்படும்.

குறிப்பு :

$$\frac{d}{dx}[f(x) + c] = f'(x) \quad \Longrightarrow \int f'(x)\ dx = f(x) + c$$

உதாரணம் :

1. $\frac{d}{dx}[x] = 1 \quad \Longrightarrow \int 1\, dx = x + c$

2. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \quad \Longrightarrow \int e^x\, dx = e^x + c$

3. $\frac{d}{dx}[x^2] = 2x \quad \Longrightarrow \int 2x\, dx = x^2 + c$

4. $\frac{d}{dx}[x^3 + 5x] = 3x^2 + 5 \quad \Longrightarrow \int (3x^2 + 5)\, dx = x^3 + 5x + c$

5. $\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)^3] = 6x(x^2 + 1) \Longrightarrow \int 6x(x^2 + 1)\, dx = (x^2 + 1)^3 + c$

தொகையீட்டு விதிகள்

$$\boxed{01)\ \int K.\ f(x)\ dx = K \times \int\ f(x)\ dx}$$

உதாரணம்:

i] $\int 5\, x^3\ dx = 5 \times \int\ x^3\ dx$

ii] $\int 4\,(x^2 + 5)\ dx = 4 \times \int\ (x^2 + 5)\ dx$

iii] $\int \frac{12x+10}{3x^2+5x+2}\ dx$

$$\int \frac{2(6x+5)}{3x^2+5x+2}\ dx = 2 \times \int\ \frac{6x+5}{3x^2+5x+2}\ dx$$

$$\boxed{02)\ \int\ \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int\ f(x)dx + \int g(x)dx\ + \mathrm{C}}$$

உதாரணம்:

i] $\int (5x^3\ + 3x)\ dx = \int\ 5x^3\ dx\ +\ \int\ 3x\ dx$

ii] $\int(\sqrt{x}+7)\ dx \ = \int \sqrt{x}\ dx + \int 7\ dx$

iii] $\int \frac{x^3+5}{x^2}\ dx$

$$\int \left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)\ dx = \int \frac{x^3}{x^2}\ dx + \int \frac{5}{x^2}\ dx$$

$$\boxed{03)\ \int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx + C}$$

உதாரணம்:

i] $\int(4x^5 - 5x)\ dx = \int 4x^5\ dx - \int 5x\ dx$

ii] $\int(\sqrt[3]{x}-2x)\ dx \ = \int \sqrt[3]{x}\ dx + \int 2x\ dx$

iii] $\int \frac{x^3-5}{x^2}\ dx$

$$\int \left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{5}{x^2}\right)\ dx = \int \frac{x^3}{x^2}\ dx - \int \frac{5}{x^2}\ dx$$

விதிகளைப் பணன்படுத்தி தொகையீட்டுச் செய்கைகள்

வடிவம் 01. $\boldsymbol{\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$

உதாரணம் :

i] $\int x^5\ dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c$

$$= \frac{x^6}{6} + c$$

ii] $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \quad = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c \quad = \frac{2\,x^{\frac{2}{3}}}{3} + c$$

ii] $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} + c$$

iv] $\int x^{-5}\ dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + c$$

v] $\int 5\ dx = \int 5\ \times\ x^0\ dx$

$$= 5 \int\ x^0\ dx$$

$$= 5 \times \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$= 5x + c$$

vi] $\int -\frac{4}{7}\ dx = \int -\frac{4}{7}\ \times\ x^0\ dx$

$$= -\frac{4}{7} \int\ x^0\ dx$$

$$= -\frac{4}{7} \times \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$= -\frac{4}{7}x + c$$

vii] $\int (x^3 + 3x^2)\ dx = \int x^3 dx + \int 3x^2\ dx$

$$= \frac{x^4}{4} + 3 \times \frac{x^3}{3} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^3 + c$$

viii] $\int x^3(2\text{x} + 1)\, dx = \int (2x^4 + x^3\ )dx$

$$= \int 2x^4 dx + \int x^3\ dx$$

$$= 2 \times \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$= \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + c$$

வடிவம் 02. $\int \boldsymbol{f(x)^n\ \ f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c}$

உதாரணம் :

i] $\int (x + 1)^2\ \ dx = \frac{(x+1)^{2+1}}{2+1} + c$

$$= \frac{(x+1)^3}{3} + c$$

ii] $\int (1 - 5x)^4\ \ dx = \int (1 - 5x)^4 \times \frac{-5}{-5}\, dx$

$$= -\frac{1}{5} \times \frac{(1-5x)^{4+1}}{4+1} + c$$

$$= \frac{-(1-5x)^5}{25} + c$$

iii] $\int \frac{1}{(2x+5)^5}\ dx \quad = \quad \int (2x+5)^{-5} \times \frac{2}{2}\ dx$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2x+5)^{-5+1}}{-5+1} + c$$

$$= \frac{-(2x+5)^{-4}}{8} + c$$

$$= \frac{-1}{8(2x+5)^4} + c$$

iv] $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x}}\ dx \quad = \quad \int (3-4x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{-4}{-4}\ dx$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{(3-4x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{(3-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \times \sqrt{3-4\mathrm{x}} + c$$

வடிவம் 03. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$

உதாரணம் :

i] $\int \frac{1}{x}\ dx \quad = \quad \ln x + c$

ii] $\int \frac{10x}{3x^2+8}\ dx \quad = \quad \int \frac{10x}{3x^2+8} \times \frac{6}{6}\ dx$

$$= \int \frac{6x}{3x^2+8} \times \frac{10}{6}\ dx$$

$$= \frac{5}{3} \int \frac{6x}{3x^2+8}\ dx$$

$$= \frac{5}{3}\ \ln 3x^2 + 8 + c$$

iii] $\int \frac{3x+x^2}{x^3}\ dx \quad = \quad \int \frac{3}{x^2}\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx$

$$= \int 3x^{-2} + \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$= 3 \times \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \ln x + c$$

$$= 3 \times \frac{x^{-1}}{-1} + \ln x + c$$

$$= \frac{-3}{x} + \ln x + c$$

வடிவம் 04. $\int \frac{f'(x)}{f(x)^2}\ dx \ = \frac{-1}{f(x)} + c$

உதாரணம் :

i] $\int \frac{10x^2}{(4x^3-7)^2}\ dx \quad = \quad \int \frac{10x^2}{(4x^3-7)^2} \times \frac{12}{12}\ dx$

$$= \int \frac{12x^2}{(4x^3-7)^2} \times \frac{10}{12}\ dx$$

$$= \frac{10}{12} \int \frac{12x^2}{(4x^3-7)^2}\ dx$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{-1}{4x^3-7} + \mathrm{c}$$

$$= \frac{-5}{6(4x^3-7)} + \mathrm{c}$$

வடிவம் 05. $\int e^{f(x)}\ f'(x)\ dx = e^{f(x)} + c$

உதாரணம் :

i] $\int e^x\ dx \quad = \mathrm{e}^x + c$

$$= 2\ e^x$$

ii] $\int 2e^x\ dx \quad = 2\ \int e^x\ dx$

$$= 2\,e^{x} + c$$

iii] $\int e^{4x-3}\ dx \quad = \int e^{4x-3} \times \frac{4}{4}\ dx$

$$= \frac{1}{4} \int e^{4x-3} \times 4\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \times e^{4x-3} + c$$

iv] $\int e^{4x}(e^{x} + e^{2x})\ dx \quad = \int e^{5x} + e^{6x}\,dx$

$$= \int e^{5x}\,dx + \int e^{6x}\,dx$$

$$= \int e^{5x} \times \frac{5}{5} dx + \int e^{6x} \times \frac{6}{6}\ dx$$

$$= \frac{1}{5} \int e^{5x} \times 5\,dx + \frac{1}{6} \int e^{6x} \times 6\,dx$$

$$= \frac{e^{5x}}{5} + \frac{e^{6x}}{6} + c$$

v] $\int e^{-x}\ dx \quad = \int e^{-x} \times \frac{-1}{-1}\ dx$

$$= -1 \times \int e^{-x} \times -1\ dx$$

$$= -e^{-x} + c$$

$$= \frac{-1}{e^{x}} + c$$

தொகையீட்டின் பிரயோகங்கள்

வரையறுத்த தொகையீடு

$f(x)$ என்பது x குறித்த சார்பாக இருக்கும் போது மாறிலிகள் a, b என்பவற்றுக்கிடையான எல்லா x இன் பெறுமானத்திற்கும் x

குறித்த தொகையீட்டின் பெறுமானமானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\,g(x) + c\,]_a^b$$

$$= [\,g(x) + c]^{|b} -= [\,g(x) + c]^{|a}$$

$$= g(b) + c - [\,g(a) + c\,]$$

$$= g(b) + c - \ g(a) - c$$

$$= g(b) - \ g(a)$$

உதாரணம் :

i] $\int_2^5 x^2\,dx = [\frac{x^{2+1}}{2+1}]_2^5$

$$= \frac{1}{3}\,[\,x^3]_2^5$$

$$= \frac{1}{3}\,[\,x^3]_2^5$$

$$= \frac{1}{3}\,[\,(5^3) - (2^3)]$$

$$= \frac{1}{3} \times 117$$

$$= 39$$

ii] $\int_2^4 (x^2 + 1)\ dx = [\,\frac{x^3}{3} + x\,]_2^4$

$$= \left[\frac{4^3}{3} + 4\right] - \left[\frac{2^3}{3} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{64}{3} + 4\right] - \left[\frac{8}{3} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{64+12}{3}\right] - \left[\frac{8+6}{3}\right]$$

$$= \frac{62}{3}$$

பிரதியிடுவதன் மூலம் தொகையிடல்.

i] $\int 3^x \sqrt{1-3x^2}\ dx$

$u = 1 - 3x^2$ என்க $\Longrightarrow$ $\frac{du}{dx} = -6x$

$$du = -6x dx$$

$$dx = \frac{du}{-6x}$$

$$\int 3^x \sqrt{1-3x^2}\ dx = \int 3x \sqrt{u}\ \ dx$$

$$= \int 3x \sqrt{u}\ \ \frac{du}{-6x}$$

$$= \int 3 \sqrt{u}\ \ \frac{du}{-6}$$

$$= -\frac{3}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\ \ du$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \times u^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{3} \times u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{3} \times (\sqrt{1-3x^2})^{\frac{3}{2}} + c$$

சுருக்கம்

- $f(x)$ என்ற சார்பை x குறித்து வகையிட்டால் கிடைக்கும் சார்பு $f'(x)$ எனின், $f'(x)$ யை x குறித்து தொகையிட கிடைக்கும் சார்பு $f(x)$ ஆகும்.
- சார்பு $f'(x)$ இன் தொகையீடு $\int f'(x)dx = f(x) + c$ ஆகும்..
- $\int_a^b f(x)\,dx = [\,g(x) + c]_a^b = g(b) - g(a)$ ஆகும்.

பயிற்சி

01) பின்வரும் சார்புகளைத் தொகையிடுக.

x^7, x^{25}, x^{-6}, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

02) பின்வரும் தொகையீடுகளைக் காண்க.

i] $\int 6x^5 dx$ ii] $\int 2x^{15}\,dx$

iii] $\int (x+1)^4 dx$ iv] $\int (x^4 + 3x^3 + 3x + 1)dx$

v] $\int (5x+2)^2 dx$ vi] $\int (x-1)^3 dx,$

vii] $\int \frac{1}{(3x-5)^4} dx$ viii] $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

ix] $\int \frac{2x+1}{4x^2+4x+3}\,dx$ x] $\int \frac{2x+1}{(4x^2+4x+3)^2}\,dx$

xi] $\int x^4(7\mathrm{x} - 1)\,dx$ xii] $\int (e^{3x} - 4ex^{5x} - e^{-x} + 7)dx$

xiii] $\int \frac{6x+x^3}{x^4}\,dx$ xiv] $\int \frac{5x^2}{(x^3-7)^2}\,dx$

03) $\int_1^2 (2x^2 + 3x)(8x + 6)\, dx$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

04) $u = (x - 2)$ என பிரதியிடுவதன் மூலம் பின்வரும் தொகையீட்டைக் காண்க.

$$\int (x + 3)\sqrt{x - 2}\, dx$$

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Berkery, D. D. (1994). *Calculus* (5th ed.). London: Ietts Education Ltd.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.

அத்தியாயம் - 06

தாயங்கள்

பொருளடக்கம் பக்கம்

6.1 அறிமுகம்.....88
6.2 தாயச் செய்கைகள்.....92
6.3 நிலை மாற்றுத் தாயம்.....95
6.4 நேர் மாற்றுத் தாயம்.....95
6.5 தாயங்களின் பிரயோகங்கள்.....97

அத்தியாயம் பற்றிய சுருக்கமான விபரிப்பு

நிரையாகவும், நிரலாகவும் அடுக்கப்படும் மூலகங்களின் கட்டமைப்பு தாயம் என வரையறுக்கப்படுகின்றது. இங்கு மூலகம் என்பது எண் பெறுமானமாகவோ அல்லது தெரியாக்கணியங்களாகவோ அல்லது வேறு குறியீடுகளாகவோ அமையலாம். கணிதத்தில் தாயம் பற்றிய கற்கையானது மாணவர்களின் எண்கள் பற்றிய தேர்ச்சியை விருத்தி செய்வதுடன் அன்றாட வாழ்வில் எண்களுடன் தொடர்புடைய கணிதச் செய்கைகளை இலகுவாக்கிக் கொள்வதற்கும் உதவுகின்றது. உதாரணமாக: இரு மாறிகள் மற்றும் மூன்று மாறிகள் அதற்கும் மேற்பட்ட எண்ணிக்கையுடைய மாறிகளைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை இலகுவாகத் தீர்ப்பதற்கும் தாயம் பற்றிய கற்கை இன்றியமையாத ஒரு அத்தியாயமாக காணப்படுகின்றது. இவ்வத்தியாத்தில் தாயங்களுடனான அட்சர கணித செய்கைகள் மற்றும் தாயத்தின் வகைகள் அவைகளுடன் சம்பந்தப்பட்ட கணித்தல்கள் போன்றன விபரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயத்தின் நோக்கம்

தாயங்களுடனான அடிப்படை கணித செய்கைகளை விளக்குதல்.

எதிர்பார்க்கைக் கற்றல் பெறுபேறுகள்

இப்பாடநெறியின் முடிவில் மாணவர்கள் தாயங்களை வகைப்படுத்தி பகுப்பாய்வு செய்துகொள்வர்.

தாயங்களுடனான கணிதப்பிரசினங்களைத் தீர்த்து ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை ஆராய்வர்.

தாயங்கள் (Matrix)

எண்களின் கூட்டத்தின் செவ்வக வடிவிலான கோலம் தாயம் என அழைக்கப்படும். அதாவது தாயத்தில் எண்கள் நிரைகளாகவும் நிரல்களாகவும் அடுக்கப்பட்டிருக்கும். தாயங்கள் பொதுவாக ஆங்கில $capital$ எழுத்துக்களால் பெயரிடப்படும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை$= 2$

நிரல்களின் எண்ணிக்கை$= 3$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை$= 3$

நிரல்களின் எண்ணிக்கை$= 2$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை$= 2$

நிரல்களின் எண்ணிக்கை$= 2$

தாயத்தில் காணப்படும் ஒவ்வொரு எண் பெறுமானமும் மூலகம் என அழைக்கப்படும்.

தாயம் ஒன்றின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை m ஆகவும், நிரல்ககளின் எண்ணிக்கை n ஆகவும் காணப்படும் போது தாயத்தின் வரிசை அல்லது பருமன் என்பது $m \times n$ எனத் தரப்படும்.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ தாயம் A யின் வரிசை $= 2 \times 3$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ தாயம் B யின் வரிசை $= 3 \times 2$

$C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ தாயம் C யின் வரிசை $= 2 \times 2$

தாயங்களின் பிரதான வகைகள்

01) நிரைத் தாயம்

ஒரு நிரையில் மாத்திரம் எண்களைக் கொண்டுள்ள தாயம் நிரைத் தாயம் எனப்படும்.

உதாரணம் :

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3}$ $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{1\times4}$

02) **நிரல் தாயம்**

ஒரு நிரலில் மாத்திரம் எண்களைக் கொண்டுள்ள தாயம் நிரல் தாயம் எனப்படும்.

உதாரணம் :

$P = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix}_{2\times1}$ $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}_{4\times1}$

03) **பூச்சியத் தாயம்**

தாயம் ஒன்றில் உள்ள அனைத்து மூலகங்களும் பூச்சியமாக காணப்படுமாயின் அது பூச்சியத் தாயம் எனப்படும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

04) **சம தாயங்கள்**

இரு தாயங்களில் உள்ள ஒத்த மூலகங்கள் யாவும் சமனாகக் காணப்படுமாயின் அவைகள் சமதாயங்கள் எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

ஆகவே $A = B$ ஆகும்

05) **சதுரத் தாயம் (square matrix)**

ஒரு தாயம் சம எண்ணிக்கையான நிரைகளையும் நிரல்களையும் கொண்டிருப்பின் அது சதுரத் தாயம் என அழைக்கப்படும்

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 8 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

குறிப்பு : சதுரத்தாயம் ஒன்றின் முதன்மை மூலைவிட்டம் அல்லது பிரதான மூலைவிட்டம் பின்வருமாறு காணப்படும்.

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 8 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

முதன்மை மூலை விட்டம்

சதுரத்தாயமானது பின்வரும் வகைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

1) மூலைவிட்டத் தாயம் (Diagonal Matrix)

ஒரு சதுர தாயத்தில் பிரதான மூலை விட்டம் வழியேயான மூலகங்கள் தவிர்ந்த ஏனைய மூலகங்கள் பூச்சியமாக காணப்படுமாயின் அது மூலை விட்டத்தாயம் என அழைக்கப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2) எண்ணித் தாயம் (Scaler Matrix)

பிரதான மூலையிட்டம் வழியேயுள்ள மூலையிட்டங்கள் யாவும் சமனாக இருப்பதோடு ஏனைய மூலகங்கள் யாவும் பூச்சியமாக இருப்பின் அத்தாயம் எண்ணித் தாயம் எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3) அலகுத் தாயம் (Identity Matrix)

சதுரத் தாயமொன்றில் பிரதான மூலை விட்டம் வழியேயான மூலகங்கள் யாவும் 1 ஆக இருப்பதோடு ஏனைய மூலகங்கள் யாவும் பூச்சியமாக இருப்பின் அத்தாயம் அலகுத் தாயம் எனப்படும்.

அலகுத் தாயங்கள் I எனும் எழுத்தால் பெயரிடப்படும்.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

4) சமச்சீர்த் தாயம் (Identity Matrix)

சதுரத் தாயமொன்றில் பிரதான மூலை விட்டம் வழியே ஏனைய மூலகங்கள் யாவும் சமச்சீர்த்தன்மை கொண்டதாக காணப்படுமாயின் அத்தாயம் அலகுத் தாயம் எனப்படும்.

உதராணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 6 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

தாயங்களின் செய்கைகள்

01) தாயம் ஒன்றை எண்ணியால் பெருக்கல்

தாயம் ஒன்றினை ஓர் எண்ணியால் பெருக்கும் போது தாயத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் தனித்தனியாக பெருக்கத்துக்குள்ளாகும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$ எனின்,

$$5A = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -10 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$$ ஆகும்.

02) தாயங்களின் கூட்டல், கழித்தல்

இரண்டு தாயங்களின் வரிசைகள் சமமாக காணப்படின் மாத்திரமே அத்தாயங்களில் கூட்டல், கழித்தல் செய்கைகளிற்குட்படுத்த முடியும்.

இந் நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்படுமானால் கூட்டல், கழித்தலின் போது இரு தாயங்களினதும் ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டல், கழித்தல் மேற்கொள்ளப்படும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$$ எனின்

i] $A + B = \begin{bmatrix} 5+(-1) & 3+5 \\ 0+4 & -2+(-3) \\ -1+2 & 4+0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

i] $A - B = \begin{bmatrix} 5-(-1) & 3-5 \\ 0-4 & -2-(-3) \\ -1-2 & 4-0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

03) தாயங்களின் பெருக்கம்.

முதல் தாயம் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் இரண்டாவது தாயம் B இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக உள்ள போது மாத்திரமே இத் தாயங்களின் பெருக்கம் AB என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

இங்கு தாயம் A யில் உள்ள ஒவ்வொரு நிரையின் மூலகங்களையும் தாயம் B இன் ஒவ்வொரு நிரல்களின் மூலகங்களையும் முறையே பெருக்கி அவற்றை கூட்டி பெற்ற பெறுமானமாக தாயம் AB யின் ஒவ்வொரு மூலகமாக அமையும்.

உதாரணம் 01

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} \{\ (3\times 1)+(0\times -3)+(4\times 6)\ \} & \{\ (3\times 2)+(0\times 7)+(4\times 8)\ \} \\ \{(-1\times 1)+(1\times -3)+(5\times 6)\} & \{(-1\times 2)+(1\times 7)+(5\times 8)\} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 27 & 38 \\ 26 & 45 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

உதாரணம் 01

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}_{4\times 3} \qquad Q = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} \{(-1)+(-6)+(-15)\} & \{(-2)+(-8)+(-18)\} \\ \{(-4)+(-15)+(-30)\} & \{(-8)+(-20)+(-36)\} \\ \{(-7)+(-24)+(-45)\} & \{(-14)+(-32)+(-54)\} \\ \{(-10)+(-33)+(-60)\} & \{(-20)+(-44)+(-72)\} \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} -22 & -28 \\ -49 & -64 \\ -76 & -100 \\ -103 & -136 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

குறிப்பு : தாயம் A யின் வரிசை $m \times r$ ஆகவும், தாயம் $\boldsymbol{B}$ யின் வரிசை $r \times n$ ஆகவும் காணப்படின் தாயம் AB யின் வரிசை $m \times n$ ஆக காணப்படும்.

நிலைமாற்றுத் தாயம் (Transpose Matrix)

ஒரு தாயத்தின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி பெறப்படும் புதிய தாயம் அவ்வாரம்ப தாயத்தின் நிலைமாற்றுத் தாயம் என அழைக்கப்படும்.

தாயம் A யின் நிலை மாற்றுத் தாயம் A^T என குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் : 01

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$ எனின், $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2}$

உதாரணம் : 02

$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times3}$ எனின், $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

நேர்மாற்றுத் தாயம் (Inverse Matrix)

A என்பது ஒரு சதுரத் தாயமாக இருக்கும் போது A இன் நேர்மாற்றுத் தாயமானது A^{-1} என குறிக்கப்படும்.

இங்கு $A.\mathrm{B} = \mathrm{B}A = I$ ஆகுமாறு தாயம் B வரையறுக்கப்படுமாயின் தாயம் B என்பது தாயம் A யின் நேர்மாற்றுத் தாயம் எனப்படும்.

அதாவது $B = A^{-1}$ ஆகும்.

இங்கு $A.\mathrm{B} = \mathrm{B}A = I$ ஆகையால்

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ என வரயறுக்கப்படுகிறது.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ என்க

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ எனின்

$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ என்பது A யின் நேர்மாற்றுத் தாயமாகும்.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவலின்றி பயன்படுத்தலாம்.

$$p = \frac{d}{ad-bc} \qquad q = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$r = \frac{-c}{ad-bc} \qquad s = \frac{a}{ad-bc}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

இங்கு $(ad-bc)$ என்பது தாயம் A யின் துணிகோவை என அழைக்கப்படும். மேலே உள்ள தாயம் A யிற்கு நேர்மாறு பெறப்படுவதற்கு $(ad-bc) \neq 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

பின்வரும் தாயங்களின் நேர்மாறுகளைக் காண்க.

i] $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{(4\times7)-(3\times1)} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ii] $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1\times3)-(2\times-4)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

தாயத்தின் பிரயோகம்

இரு மாறிகளுடனான சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ என்க

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$$

$$A \times A^{-1} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \times A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \{A \times A^{-1} = I\}$$

$I \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \times A^{-1}$ $\Longrightarrow$ அலகுத் தாயத்தின் பருமன் 1ஆகும்

ஆகவே $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \times A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

உதாரணம் :

தாயத்தின் உபயோகத்தை பயன்படுத்தி பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்க்க

$2x + y = 4$

$x - y = 5$

தீர்வு

$2x + y = 4$

$x - y = 5$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை பின்வருமாறு தாய வடிவில் எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ என்க, ஆகவே $A^{-1} = \frac{1}{-2-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 5 \\ \frac{1}{3} \times 4 + \frac{-2}{3} \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{3} \\ -\frac{6}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ஆகவே $x = 3, \quad y = -2$ என்பன சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்

சுருக்கம்

- தாயத்தின் மூலகங்கள் செவ்வக வடிவில் அடுக்கப்படடிருக்கும்.
- தாயம் ஒன்றின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை m ஆகவும், நிரல்ககளின் எண்ணிக்கை n காணப்படும்போது தாயத்தின் வரிசை அல்லது பருமன் என்பது $m \times n$ எனத் தரப்படும்.
- வரிசை சமனாக உள்ள தாயங்களுக்கு மட்டும் கூட்டல், கழித்தல் செய்கைகளை மேற்கொள்ள முடியும்.
- தாயத்தினைப் பயன்படுத்தி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முடியும்.

பயிற்சி

(01) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$

i] $2A$

ii] 2B

iii] $\mathrm{A} + \mathrm{B}$

iv] $\mathrm{A} - \mathrm{B}$

v] $2\mathrm{A} + \mathrm{B}$

vi] $\mathrm{A} - 2\mathrm{B}$ என்பவற்றைக் காண்க

(01) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times2}$

i] AB

iI] A^{-1}

iii] $A^{-1}.B$

iv] A^{T} என்ாவற்றைக் காண்க

(03) $4x + 5y = 5$, $3x - 4y = 3$ ஆகிய சமன்பாடுகளை தாயத்தின் உதவியுடன் தீர்க்க.

உசாத்துணை

Bastock, & Chadler, S. (1978). *Pure Mathematics.* London : Nelson.

Edward, D. T. (1993). *Theory and Problems of Mathematical Methods of Business and Economics.* New York: McGraw- Hill.

Francis, A. (1998). *Bussiness Maths and Statistics* (5th ed.). London: Letts Education Ltd.